<u>**COLÉGIO PEDRO II – CAMPUS HUMAITÁ II**</u>

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - 2020

Coordenador Pedagógico: Profa Rachel Bergman Fonte

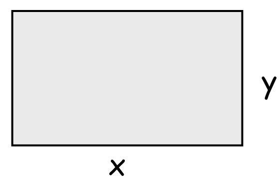
2ª série do Ensino Médio

Profas. Christine, Nathalia, Priscila Belota, Priscilla Guez, Rachel.

Aluno(a): ________________________________ nº: _____ Turma: _______

ESTUDO DIRIGIDO - FUNÇÃO QUADRÁTICA OU FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º. GRAU

1. Quero marcar uma região retangular usando 100 metros de corda. Escreva uma expressão da área S dessa região em função do lado x.

   $2x + 2y = 100 \Rightarrow 2(x + y) = 100 \Rightarrow$

   $x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$

   $S = x.y \Rightarrow S(x) = x\,(50-x)$

   $S(x) = 50x - x^2$

2. Escreva uma expressão para o produto de dois números cuja soma deles é 180.

   $x + y = 180 \Rightarrow y = 180 - x$

   $P = x.y$

   $P(x) = x\,.\,(180-x) = 180.x - x^2$

3 - O lucro **L** obtido por uma companhia de viagens em certa excursão é função do preço **x** cobrado. Se **x** for um número muito pequeno, o lucro é negativo, ou seja, prejuízo. Se **x** for um número muito grande, o lucro também será negativo porque poucas pessoas farão a excursão. Um economista, estudando a situação deduziu a fórmula para **L** em função de **x** como sendo $L(x) = -x^2 + 90x - 1400$. (L e x em unidades monetárias convenientes.)

Diz-se que a função que tem Dom = $\mathbb{R}$ e contra-domínio = $\mathbb{R}$

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$ com $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^*$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$

é o modelo matemático para as três situações reais apresentadas e denomina-se **Função Quadrática** ou **Função Polinomial do 2º. Grau**.

Se f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por f(x) = $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, é possível:

1º.) dado $x_0 \in \mathbb{R}$, calcular $f(x_0)$.

2º.) dada $f(x_0)$, calcular x_0.

Zeros da função quadrática

Encontrar o(s) zero(s) da função quadrática é resolver a seguinte equação do 2º. grau: f(x) = 0 $\Rightarrow$ $ax^2 + bx + c = 0$

Dependendo do sinal de $\Delta = b^2 - 4ac$ temos o seguinte:

$\Delta > 0 \to$ 2 raízes reais e diferentes

$\Delta = 0 \to$ 2 raízes reais e iguais (normalmente dizemos 1 raiz)

$\Delta < 0 \to$ não possui raízes reais

<u>Exemplo 1</u>:

Seja $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

a) Calcule $f(1)$.

$f(1) = f(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$

b) Calcule x tal que $f(x) = 12$

A solução se resume em resolver a seguinte equação do 2º. grau:

$x^2 - 5x + 6 = 12 \quad \Rightarrow x^2 - 5x + 6 - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x - 6 = 0$

Você pode usar a fórmula de Bháskara ou usar outra forma de resolução.

Resolvendo por fatoração:

$$(x-6)(x+1) = 0$$
$$(x-6) = 0 \Rightarrow x = 6$$
ou $(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$

Portanto para x = 6 ou x = - 1 teremos imagem f(x) = y =12.

c) Calcule o(s) zero(s) da função.

Agora vamos resolver a equação:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Mais uma vez, por fatoração:

$$(x-3)(x-2) = 0$$
$$(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3$$
ou $(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

Portanto os zeros da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ são x = 3 ou x = 2.

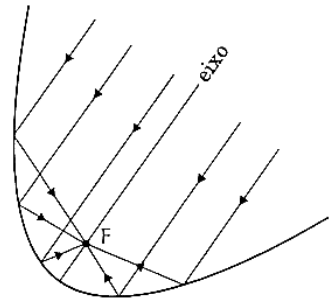
Valor inicial da função quadrática

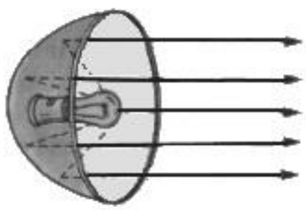
Observe que $f(0) =$ $a.0^2 + b.0 + c = 0 + 0 + c = c$. Então sempre teremos $f(0) = c$ e $f(0)$ é chamado de valor inicial da função quadrática.

Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

A parábola é uma curva que tem uma propriedade geométrica muito interessante: observe na figura ao lado,

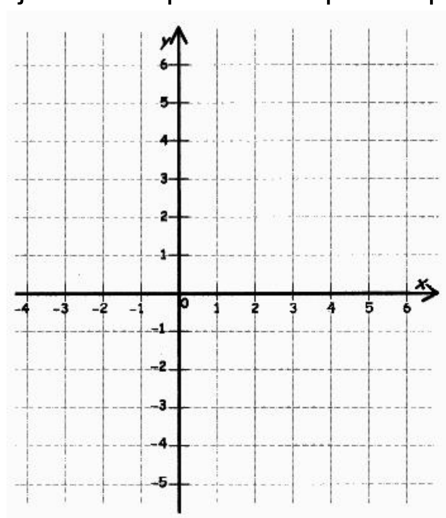




que os raios (de luz, de rádio, eletromagnéticos) que incidem paralelos ao eixo da superfície parabólica (o próprio eixo da parábola) convergem para um único ponto, chamado de foco da parábola, ampliando assim grandemente a intensidade do sinal recebido. Por causa desta propriedade, as superfícies parabólicas, isto é, as superfícies que são obtidas girando-se a parábola em torno de seu eixo, possuem inúmeras aplicações, como por exemplo, as antenas parabólicas. Outros instrumentos, como holofotes, lanternas e faróis dos carros atuam inversamente: refletem os raios de luz que se concentram no foco (lâmpada) paralelamente ao eixo da parábola.

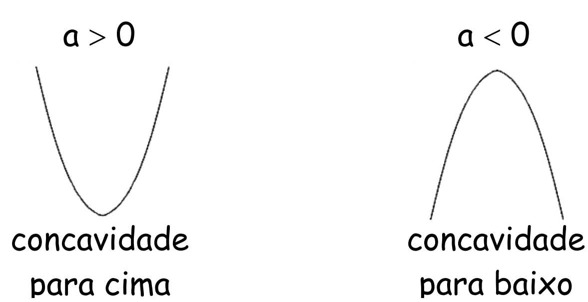
Geometricamente falando, dados um ponto **F** e uma reta **d** que não contém esse ponto, a parábola de foco **F** e diretriz **d**, é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de **F** e de **d**.

d) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 6$ no sistema de eixos cartesianos ao lado.



Observações importantes

- Nas funções polinomiais do 2º grau quando a > 0, a parábola está voltada para cima. Dizemos que sua **convavidade** é para cima. E quando a < 0, sua **convavidade** é para baixo.



- Na parábola sempre existe um ponto de máximo ou mínimo. Esse ponto é chamado vértice da parábola (**V**) e suas coordenadas são "x do vértice" (x_V) e "y do vértice" (y_V). O vértice da parábola é importante pois são suas coordenadas que determinam a imagem e os intervalos de crescimento e decrescimento da função.

	Máximo ou mínimo?	Imagem	Intervalo de crescimento	Intervalo de decrescimento
a > 0	Mínimo	$[y_v, +\infty[$	$[x_v, \infty[$	$]-\infty, x_v]$
a < 0	Máximo	$]-\infty, y_v]$	$]-\infty, x_v]$	$[x_v, \infty[$

É possível encontrar o vértice da parábola sem esboçar o gráfico:
A parábola é uma figura simétrica, e seu eixo de simetria é uma reta vertical que contém o ponto V = (x_V; y_V). Isto significa que quaisquer dois pontos da parábola que tenham a mesma ordenada (valor de y), eqüidistam do eixo de simetria. Em particular, para os pontos (x', 0) e (x", 0), onde x' e x'' são os zeros da função, isto também é verdade. Podemos concluir então que x_V é a média aritmética dos zeros, ou seja, $x_V = \frac{x' + x''}{2}$.
Usando a Fórmula de Bháskara, temos:

$$x_v = \frac{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{-\frac{2b}{2a}}{2} = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Substituindo $x = -\frac{b}{2a}$ na função f(x) = ax² + bx + c, obtemos a ordenada y_V do vértice.

$$y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_v = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_v = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \quad \Rightarrow$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Exemplo 2:

Seja $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

a) Determine os pontos de interseção com o eixo x.

Os pontos de interseção com o eixo x, serão pontos com ordenada y = 0. Portanto devemos encontrar os zeros da função:

Fazendo y = 0 e resolvendo a equação do 2º grau $x^2 - 6.x + 8 = 0$, temos $x = 2$ e $x = 4$ como raízes. Então, a parábola intersecta o eixo x nos pontos (x, y) = (2, 0) e (4, 0).

b) Determine o ponto de interseção com o eixo y:

Fazendo x = 0, temos $y = 0^2 - 6.0 + 8 = 0 - 0 + 8 = 8$, logo a parábola intersecta o eixo y no ponto (x, y) = (0, 8).

c) Determine as coordenadas do vértice:

Para calcular x_v basta calcular a média aritmética entre 2 e 4, ou seja:

$x_v = \frac{2+4}{2} = 3$. Se quiséssemos usar a fórmula, teríamos:

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2.1} = 3$

Para calcular y_v também temos 2 maneiras: ou usamos a fórmula $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-6)^2 - 4.1.8}{4.1} = -\frac{36-32}{4} = -\frac{4}{4} = -1$, ou substituímos o valor de x_v na expressão algébrica da função e obtemos:

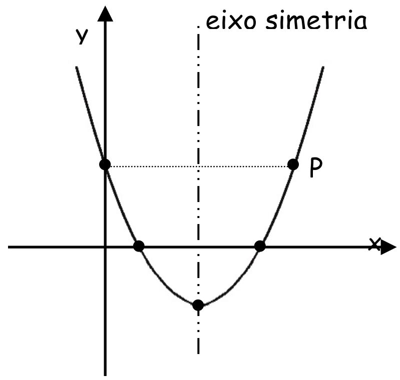
$f(3) = 3^2 - 6.3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$

Assim, encontramos as coordenadas do vértice V = (3, -1).

d) Esboço do gráfico:

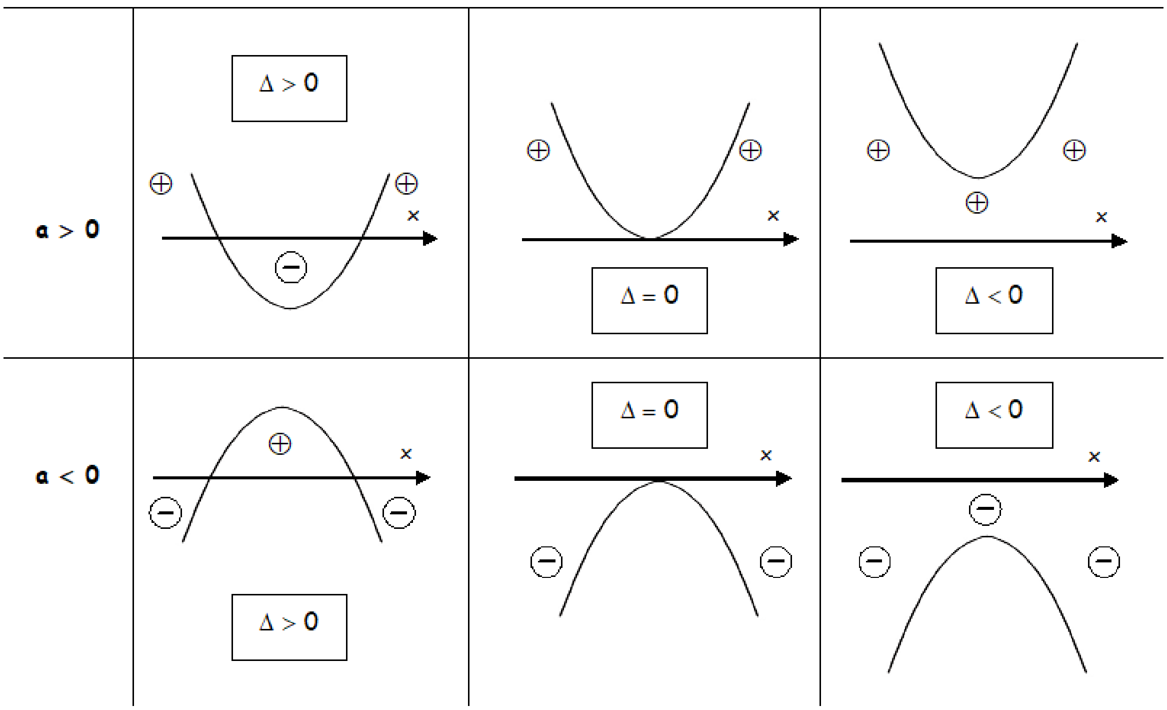
Com esses pontos podemos esboçar o gráfico dessa função. Observe que as coordenadas do ponto P podem ser facilmente obtidas lembrando que ele é simétrico ao ponto (0, 8) em relação ao eixo da parábola.

	pontos
interseção com o eixo x	(2, 0) e (4, 0)
interseção com o eixo y	(0, 8)
vértice	(3, - 1)
P	(6, 8)



- Já sabemos que, quando estudamos o sinal de uma função f(x), na realidade estamos querendo descobrir para que valores de seu domínio (valores de x) a função assume valores positivos, negativos ou nulos.

A seguir, um resumo de como é o sinal da função quadrática:



Observando o gráfico vemos que:

- o valor mínimo de f é y = - 1;
- o conjunto imagem é Im (f) = [- 1, ∞);
- a função é decrescente para valores de x ≤ 3 e crescente para valores de x ≥ 3.
- a função assume valores positivos nos intervalos (- ∞,, 2) U (4, ∞,) e assume valores negativos no intervalo (2, 4).

Existem outras formas para a expressão algébrica da função quadrática:

Forma fatorada: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ sendo x_1 e x_2 as raízes de $f(x) = 0$.

Forma canônica: $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$

Exemplos:

a) Determine a expressão algébrica da função quadrática tal que em $x = -2$ a função atinge seu valor mínimo de $y_{\min} = -16$ e $f(3) = 9$. (Sugestão: use a forma canônica)

$f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$ = a.(x - (-2))^2 + (-16) = a.(x+2)^2 – 16

$f(3) = 9$ ⇒ f (3) = a.(3+2)^2 – 16 = 9

a.5^2 - 16 = 9 ⇒ 25.a - 16 = 9 ⇒ 25.a = 16 + 9 ⇒

25.a = 25 ⇒ a = 25/25 = 1

Assim $f(x) = 1 \cdot (x + 2)^2 - 16$ ⇒

f(x) = (x + 2)^2 - 16

ou se preferir na forma f(x) = a.x^2+ b.x + c, teremos:

f(x) = x^2 + 4x + 4 – 16 ⇒ **f(x) = x^2 + 4x -12**

b) Os zeros de uma função quadrática são $x = \frac{2}{3}$ e $x = -1$. Além disso, $f(1) = 2$.

Determine a expressão algébrica de f. (Sugestão: use a forma fatorada)

$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ ⇒ f(x) = a. $(x - \frac{2}{3})$. (x – (- 1) = a.(x - $\frac{2}{3}$).(x + 1)

⇒ f(x) = a.(x - $\frac{2}{3}$).(x + 1)

f (1) = 2 ⇒ f(1) = a.(1 - $\frac{2}{3}$).(1 + 1) = 2

⇒ a. (1/3) .2 = 2

⇒ a.(2/3) = 2 ⇒ 2.a/3 = 2

⇒ a = 3

Assim, **f(x) = 3. (x - $\frac{2}{3}$).(x + 1)**

ou se preferir na forma f(x) = a.x^2+ b.x + c, teremos:

f(x) = 3. (x - $\frac{2}{3}$).(x + 1) = 3.(x^2+ x - $\frac{2}{3}$.x - $\frac{2}{3}$) = 3x^2 + 3x – 2x – 2 ⇒

f(x) = 3x^2 + x - 2