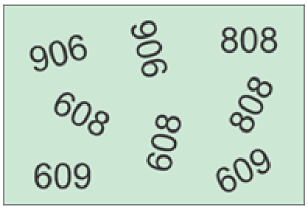
Olá Comunidade Canguru!
Seguem abaixo as resoluções comentadas das questões enviadas dia 28.05.2020.
Até breve!

Equipe Canguru de Matemática Brasil.

Nível P

1. Quantos números diferentes de três algarismos podem ser vistos no quadro ao lado?

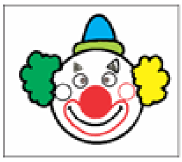


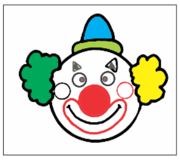
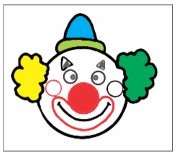
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Resolução – Alternativa B.

Há 10 números de 3 algarismos que podem ser vistos no quadro, são eles: 906, 906, 808, 808, 609, 609, 608, 608, 809 e 809.
Observe que existem cinco pares de números. Os dois números de cada par são iguais entre si, mas diferentes dos números de outro par. Portanto existem 5 números diferentes de três algarismos.

2. O palhaço Beleléu se olha no espelho e vê a imagem ao lado. Nesse mesmo instante, você está atrás do espelho e consegue ver a cara do palhaço Beleléu. O que você deve enxergar?



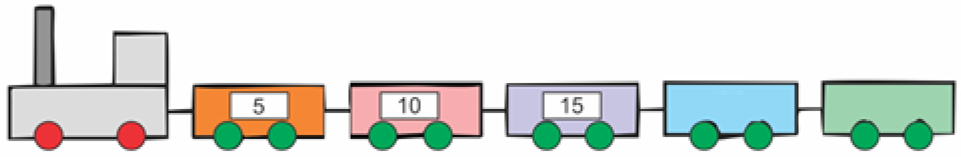
A)  B)  C)  D)  E) 

Resolução – Alternativa D.

Fatos que ajudam: quando observamos a imagem de um objeto refletida por um espelho plano é possível verificar que objeto e imagem são idênticos a menos de suas orientações horizontais. Ou seja, o lado esquerdo do objeto corresponde ao lado direito da imagem, assim como o lado direito do objeto corresponde ao lado esquerdo da imagem, fenômeno chamado de reversão.

Observe que a imagem refletida mostra o palhaço com o chapéu azul, cabelo verde à esquerda e cabelo amarelo à direita. Dessa forma, concluímos que a vista original do objeto, por trás do espelho, corresponde ao palhaço ainda com chapéu azul, mas com cabelo amarelo à esquerda e com cabelo verde à direita.

3. No trenzinho, os dois últimos vagões têm a mesma quantidade de passageiros. Há um total de 78 passageiros no trem. Quantos passageiros há no último vagão?

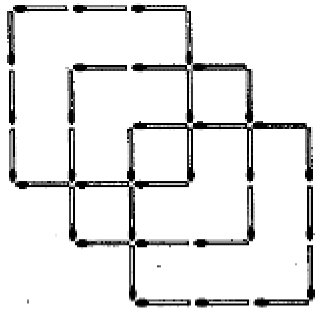


A) 19 B) 24 C) 30 D) 40 E) 48

Resolução – Alternativa B.

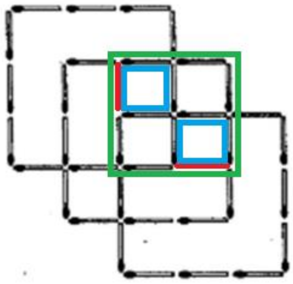
Os três primeiros vagões possuem, juntos, 5 + 10 + 15 = 30 passageiros. Sabemos que, no trem, existem 78 passageiros, portanto restam 78 - 30 = 48 deles para os últimos dois vagões. Como esses dois vagões possuem a mesma quantidade de passageiros, concluímos que cada um deles deve ter 48 ÷ 2 = 24 passageiros.

4. Na montagem ao lado, feita com palitos de fósforos, é possível ver um total de 8 quadrados. Juntando mais palitos a essa montagem, queremos obter um total de 11 quadrados. Qual a menor quantidade de palitos deve ser adicionada na montagem para obter esse resultado?



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolução - Alternativa B.



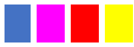
Fatos que ajudam: os lados de um quadrado possuem todos a mesma medida. Dessa forma, cada quadrado da montagem tem a mesma quantidade de palitos em seus lados.

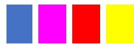
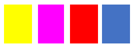
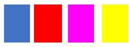
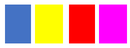
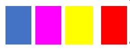
Ao inserirmos dois palitos, como aqueles destacados em vermelho, por exemplo, podemos formar 3 novos quadrados, representados em azul e verde. Assim obtemos 8+3=11 quadrados.

5. Juliana pendurou na sua porta uma cordinha com oito bandeirinhas, comemorando as festas juninas. Para variar, Juliana troca diariamente as posições de exatamente duas bandeirinhas sem enfeites (azul, rosa, vermelha e amarela), sem repetir posições já vistas. No máximo, quantos dias ela poderá fazer essa troca sem repetir a figura ao lado?

A) 4 B) 6 C) 12 D) 18 E) 24

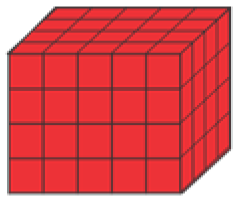
Resolução - Alternativa B.

Fatos que ajudam: vamos representar cada uma das bandeirinhas nas cores azul, rosa, vermelha e amarela por um quadradinho colorido:  . Repare que somente a ordem que estabelecemos entre as 4 bandeirinhas sem enfeites importa. Portanto, não precisamos levar em consideração as bandeirinhas com enfeites, já que elas permanecerão inalteradas.

A princípio, as bandeirinhas lisas estão organizadas da seguinte maneira:  .
Sabemos, do enunciado, que Juliana troca, diariamente, duas bandeirinhas sem repetir posições já vistas.
Dessa forma, vamos começar trocando a bandeira azul com cada uma das outras bandeiras:  (azul e rosa),  (azul e vermelha),  (azul e amarela).
Agora vamos trocar a bandeira rosa com cada uma das outras, lembrando que já fizemos a troca com a azul:  (rosa e vermelha),  (rosa e amarela).
Agora trocamos as duas últimas restantes, vermelha e amarela: .
Temos, portanto, um total de 6 diferentes posições possíveis para as bandeirinhas.

Nível E

1. Cristina construiu o bloco ao lado usando cubinhos vermelhos e cubinhos azuis de mesmo tamanho. O bloco é totalmente vermelho do lado de fora, mas todos os cubinhos dentro do bloco são azuis. Quantos cubinhos azuis Cristina usou?



A) 12 B) 24 C) 36 D) 40 E) 48

Resolução - Alternativa A.

Fatos que ajudam: chamamos de volume de um objeto o valor que representa o espaço ocupado por ele. Para determinar o volume de um bloco retangular, como o construído por Cristina, basta multiplicarmos as medidas das três dimensões do bloco: largura, comprimento e altura. Por fim, note que, na situação em questão, a unidade de medida tomada é o cubinho.

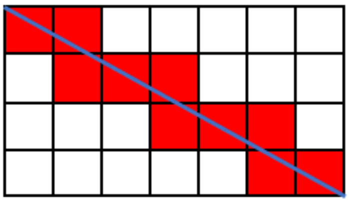
Observe que, ao desconsiderarmos os cubos vermelhos da camada externa do bloco, restará um bloco menor formado apenas por cubos azuis e com as seguintes dimensões: comprimento formado por 3 cubos, largura formada por 2 cubos e altura formada por 2 cubos.
Portanto existem, ao todo, $3\times2\times2=12$ cubos azuis

2. Daniel dividiu um retângulo de 4 cm de altura e 7 cm de comprimento em quadradinhos de lado 1 cm. Em seguida, ele traçou uma linha reta ligando dois vértices opostos desse retângulo. Quantos quadradinhos foram cortados por essa diagonal?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Resolução – Alternativa C.

Fatos que ajudam: Um retângulo é um quadrilátero, ou seja, um polígono de quatro lados, e que possui dois pares de lados paralelos e os quatro ângulos internos retos. Uma diagonal é um segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos de um polígono.



Observe que, ao realizar a divisão do retângulo da forma mencionada, Daniel obtém um desenho, que pode representar uma malha quadriculada.
Ao ligar dois vértices opostos dessa figura, é possível visualizar a imagem ao lado.
Os quadrados coloridos de vermelho representam aqueles atravessados pela diagonal. No total, são 10 quadrados.

3. Numa sala de aula há 29 crianças. Dessas crianças, 12 têm exatamente uma irmã e 18 têm exatamente um irmão. Ana, Beto e Cris não têm nem irmã nem irmão. Quantas crianças dessa classe têm uma irmã e um irmão?

A) nenhuma B) uma C) três D) quatro E) seis

Resolução - Alternativa D.

Sabendo que o total de alunos na sala é 29 e que Ana, Beto e Cris não têm irmãos, então 29 - 3 = 26 crianças possuem, ao menos, um irmão ou uma irmã.
Veja que, dessas 26 crianças, 12 delas possuem exatamente uma irmã. Logo 26-12=14 crianças não possuem uma irmã, ou seja, possuem um irmão. Acontece que os alunos totalizam 18 irmãos. Dessa forma, as 14 crianças que não possuem irmã possuem exatamente um irmão e 4 das crianças que já possuem uma irmã também possuem um irmão.

4. Kang foi a uma padaria e comprou três tipos de doces: pequeno, médio e grande, com preços indicados na figura. No total ele comprou 10 doces e pagou 16 reais. Quantos doces grandes ele comprou?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

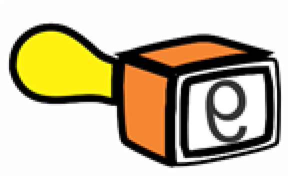
Resolução - Alternativa A.

Fatos que ajudam: sabemos do enunciado que Kang comprou 10 doces e pagou um total de 16 reais. Sabemos ainda que o doce pequeno custa 1 real, que o doce médio custa 2 reais e que o doce grande custa 4 reais. Dessa forma vamos analisar a existência de cada possibilidade de compra, com base na quantidade de doces grandes.

Se Kang comprar 4 doces grandes gastará um total de 4 x 4 =16 reais apenas com esses doces. Logo essa situação não é possível, pois ele comprou um total de 10 doces.
Se Kang comprar 3 doces grandes gastará 3 x 4 = 12 reais com esses doces. Além disso restarão 16 - 12 = 4 reais e 10 - 3 = 7 doces a serem comprados. Veja que essa situação também não é possível, pois mesmo se comprar somente doces pequenos conseguirá apenas 4 desses e ainda faltarão 7 - 4 = 3 doces para serem comprados.
Se Kang comprar 2 doces grandes gastará 2 x 4 = 8 reais com esses doces. Além disso, restarão 16 - 8 = 8 reais e 10 - 2 = 8 doces a serem comprados. Veja que só seria possível comprar mais

8 doces se todos eles fossem pequenos. Essa situação também não é válida, pois sabemos que Kang comprou doces dos três tipos.
Dessa forma, chegamos à conclusão de que Kang só pode ter comprado 1 doce grande. Nessa situação restarão 16 - 4 = 12 reais e 10 - 1 = 9 doces a serem comprados. Essa compra pode ser distribuída em 3 doces médios e 6 doces pequenos, já que (1x4)+(3x2)+(6x1)=16.

5. Lúcia quer numerar as páginas do seu diário usando seus carimbos de algarismos. Seu diário tem 60 páginas. Quantas vezes ela terá que usar o carimbo da figura?



A) 6 B) 7 C) 9 D) 12 E) 13

Resolução - Alternativa E.

Fatos que ajudam: Algarismos e Números são conceitos relacionados, mas diferentes: os algarismos são os símbolos utilizados para representar os números. O sistema de numeração decimal que adotamos possui 10 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Com esses algarismos, podemos escrever infinitos números.

Perceba que o carimbo pode ser utilizado para registrar tanto o algarismo 6 como o algarismo 9. Dessa forma, ele poderá ser utilizado em todas as situações onde qualquer um desses dois algarismos aparecem, ou seja, em todas as páginas cujos números também são formados por esses algarismos.
O algarismo 6 aparece nas seguintes páginas: 6, 16, 26, 36, 46, 56, 60. Num total de 7 vezes.
O algarismo 9 aparece nas seguintes páginas: 9, 19, 29, 39, 49, 59. Num total de 6 vezes.
Portanto Lúcia terá que usar o carimbo por 7 + 6 = 13 vezes.

Nível B

1. Quantos números inteiros são maiores do que 2,09 e menores do que 15,3?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

Resolução - Alternativa D.

Fatos que ajudam: O conjunto dos números inteiros é composto por todos os números naturais, seus opostos e o zero.

O número inteiro maior e mais próximo de 2,09 é o 3, enquanto o número inteiro menor e mais próximo de 15,3 é o 15. Dessa forma, existem 13 números inteiros do 3 ao 15. São eles: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15.

2. Qual é o valor da expressão $\dfrac{2020+2020+2020+2020+2020}{2019+2019+2019+2019+2019}$?

A) $1-\dfrac{1}{2020}$ B) $\dfrac{2021}{2019}$ C) $1+\dfrac{1}{2019}$ D) $\dfrac{20}{19}$ E) 5

Resolução – Alternativa C.

Fatos que ajudam: Sejam A, B e C números inteiros, com C≠0. Vale a seguinte igualdade da adição de frações:

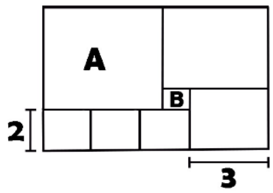
$$\frac{A+B}{C}=\frac{A}{C}+\frac{B}{C}.$$

Dessa forma, podemos calcular a expressão dada da seguinte maneira:

$$\frac{2020+2020+2020+2020+2020}{2019+2019+2019+2019+2019}=\frac{5\times 2020}{5\times 2019}=\frac{2020}{2019}=\frac{2019+1}{2019}=\frac{2019}{2019}+\frac{1}{2019}$$

$$1+\frac{1}{2019}.$$

3. O retângulo ao lado é formado por sete quadrados. O quadrado A é o maior de todos e o quadrado B é o menor de todos. Em quantos quadrados iguais ao B o quadrado A pode ser dividido?



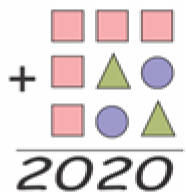
A) 16 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

Resolução - Alternativa B.

Fatos que ajudam: um quadrado é um quadrilátero com todos os lados de mesma medida e os quatro ângulos internos retos.

Observe, inicialmente, que os lados de dois quadrados iguais ao B juntos equivalem ao lado de um quadrado de lado 2. Logo o lado do quadrado B vale 1.
Por outro lado, dois lados de um quadrado de lado 2 e um lado de um quadrado igual ao B, ou seja, de lado 1 juntos equivalem ao lado do quadrado A. Portanto o lado do quadrado A vale 2 + 2 +1 = 5.
Como o comprimento do quadrado é igual a sua altura, pois seus lados têm mesma medida, concluímos que no quadrado A cabem 5 fileiras com 5 quadrados iguais ao B em cada.
Portanto o quadrado A pode ser dividido em 5x5 = 25 quadrados iguais ao B.

4. Na conta ao lado, as figuras iguais representam algarismos iguais e figuras diferentes representam algarismos diferentes.



Quanto vale  ?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

Resolução - Alternativa E.

Fatos que ajudam: o triângulo, o quadrado e o círculo representam algarismos. Dessa forma, o menor valor que pode ser atribuído a uma dessas figuras é 0 e o maior é 9. Portanto ao adicionarmos os três, a soma atinge, no máximo, a segunda dezena.

Observando a coluna das unidades na adição representada pelo desenho percebemos que o quadrado, o triângulo e o círculo, juntos, devem resultar em 10 ou 20, pois o algarismo da casa das unidades do número resultante é 0. Por outro lado, a segunda coluna na adição é representada pelos mesmos números, em posições trocadas. Além disso, devemos considerar o valor das dezenas obtido na adição da primeira coluna. Como o algarismo da casa das dezenas do número resultante é 2, concluímos que o quadrado, o triângulo e o círculo juntos valem 20.

5. Ana tem uma caixa com 9 lápis. Pelo menos um dos lápis é azul. Cada grupo de quatro desses lápis tem pelo menos dois lápis de mesma cor e cada grupo de cinco desses lápis tem pelo menos três de mesma cor. Quantos lápis azuis há na caixa?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolução – Alternativa C.

Observe que, num grupo de quatro lápis, pelo menos dois deles têm a mesma cor. Isso significa que, se num grupo de 4 lápis existe um lápis azul, então os outros 3 lápis têm a mesma cor ou existe, pelo menos, mais um lápis azul. Dessa forma verificamos pode existir mais um lápis azul na caixa de Ana.
Veja, agora, que num grupo de 5 lápis, pelo menos três deles tem a mesma cor. Como sabemos que existem 2 lápis azuis na caixa, esses dois lápis podem fazer parte de um grupo de 5 lápis. Decorre disso que os outros três lápis têm uma mesma cor diferente de azul ou existe mais um lápis azul na caixa. Dessa forma, verificamos que pode existir mais um lápis azul na caixa de Ana. Portanto temos a garantia de que existem 3 lápis azuis na caixa.

Nível C

1. Na floricultura perto de sua casa, Leonardo viu 5 vasos de orquídeas para vender. O vendedor disse que a média de preços dos vasos era de 60 reais e pegou um dos vasos para o Leonardo ver. Nisso, o vaso caiu e quebrou e o vendedor, desolado, disse que agora a média de preços dos vasos restantes era 50 reais. Qual era o preço do vaso que caiu?

A) 10 reais B) 20 reais C) 55 reais D) 60 reais E) 100 reais

Resolução – Alternativa E.

Fatos que ajudam: uma média aritmética, que serve para descrever determinado fenômeno que desejamos destacar, é calculada pela razão entre os valores atribuídos juntos ao fenômeno e a quantidade de valores existentes. Dessa forma, a média dos preços dos vasos foi calculada pela razão entre os preços dos vasos juntos e a quantidade de vasos da floricultura.

Vamos representar por x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 os cinco vasos de orquídeas da floricultura.

Sabendo que a média de preços desses cinco vasos era de 60 reais, podemos montar a seguinte equação:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = 60 <=> x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 300.$$

Considere, agora, que o vaso que caiu seja representado por x_5. Novamente, podemos representar a média dos vasos restantes através da seguinte equação:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 50 <=> x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 200.$$

Portanto, podemos descobrir o preço do vaso que caiu utilizando as informações das duas equações descritas:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 300 <=> 200 + x_5 = 300 <=> x_5 = 100.$$

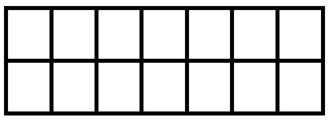
2. Miguel tem 42 cubos iguais, de lado 1 cm. Ele usou todos esses cubos para construir um bloco retangular. O perímetro da base desse bloco é 18 cm. Qual é a altura do bloco?

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm D) 4 cm E) 5 cm

Resolução – Alternativa C.

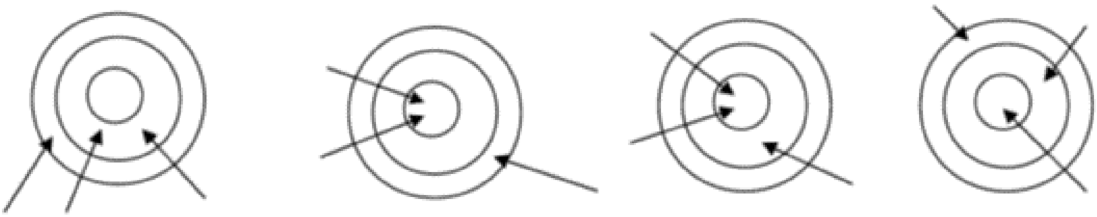
Fatos que ajudam: observe que o número de cubos de Miguel pode ser decomposto em fatores primos, ajudando a sugerir como esses cubos podem estar dispostos. Além disso, o bloco construído é retangular, o que significa que sua base é um retângulo. Por fim, perímetro é igual à medida de todos os lados de uma figura juntos.

Fazendo a decomposição do 42 em fatores primos, obtemos: $42 = 2 \times 3 \times 7$.
Dessa forma podemos verificar que $42 = 6 \times 7 = 14 \times 3 = 21 \times 2$, ou seja, existem três possibilidades para construir um bloco retangular usando essa quantidade de cubos.
Por outro lado, verifique que a base apresenta perímetro igual a 18cm somente quando formada por 14 cubos distribuídos em duas fileiras de sete cubos cada, como mostra a imagem a seguir, que representa o bloco visto de cima.



Assim existem 3 camadas de cubos iguais as da imagem e, portanto, que a altura do bloco é igual a 3cm.

3. Juliana atirou três flechas em cada um dos quatro alvos abaixo. Ela obteve 29 pontos no primeiro alvo a partir da esquerda, 43 no segundo e 47 no terceiro. Quantos pontos ela obteve no quarto alvo?



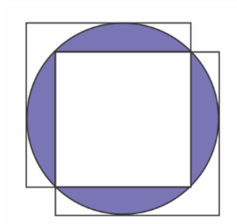
A) 31 B) 33 C) 36 D) 38 E) 39

Resolução – Alternativa C.

Fatos que ajudam: poderíamos representar as pontuações de cada uma das regiões do alvo por incógnitas e utilizar um sistema linear que nos permitisse encontrar o valor da pontuação de cada região. Entretanto nos interessa somente descobrir a pontuação obtida no último alvo, portanto vamos utilizar a estratégia a seguir.

Observe que, no último alvo, existe uma fleche em cada uma das três regiões.
Veja agora que se juntarmos as pontuações do primeiro e do segundo alvos, obteremos 29+43=72 pontos. Acontece que, nesse total, existem duas flechas em cada uma das regiões do alvo. Isso significa que o último alvo atinge metade desses pontos, ou seja, 36 pontos.

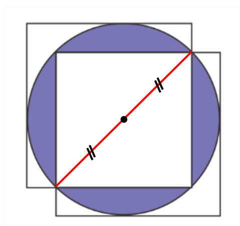
4. Dois quadrados iguais, parcialmente sobrepostos, cobrem um círculo com 3 cm de raio, conforme figura ao lado. Qual é a área, em cm^2, da região colorida, na figura?



A) 9(π-1) B) 6(2π-1) C) 9π-25 D) 9(π-2) E) $\frac{6\pi}{5}$

Resolução – Alternativa D.

Fatos que ajudam: o raio de uma circunferência corresponde ao segmento que une o centro a qualquer ponto da circunferência. O diâmetro de uma circunferência corresponde a uma corda que une dois pontos da circunferência e que também passa pelo centro. Observe, a partir das definições anteriores, que o raio é igual à metade do diâmetro. Uma diagonal de um polígono corresponde a um segmento que une dois de seus vértices não consecutivos. Um quadrado é um polígono com quatro lados de mesma medida e os quatro ângulos internos retos. O Teorema de Pitágoras relaciona o quadrado da medida da hipotenusa de um triângulo retângulo com os quadrados das medidas de seus catetos. A área de um quadrado pode ser obtida multiplicando-se as medidas de dois de seus lados. Por fim, dado um círculo com raio igual a R, podemos calcular sua área da seguinte maneira: $\acute{A}rea = \pi \times R^2$.



Vamos, inicialmente, traçar uma diagonal do quadrado inscrito ao círculo. Observe que essa diagonal também corresponde ao diâmetro do círculo circunscrito ao quadrado menor e que, assim, é igual ao dobro desse raio.

Veja que o quadrado em questão foi dividido em dois triângulos retângulos com mesmas dimensões. Dessa forma, considerando l a medida do lado do quadrado, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para relacionar a medida dos seus lados com a medida de suas diagonais da seguinte forma:

$d^2 = l^2 + l^2 <=> d = \sqrt{2l^2} <=> d = l\sqrt{2}.$

Por outro lado, sabemos que o raio é igual à metade da medida dessa diagonal, já que é igual a metade do diâmetro. Assim, podemos utilizar a seguinte equação para calcular a medida do lado do quadrado:

$\frac{d}{2} = 3 <=> \frac{l\sqrt{2}}{2} = 3 <=> l = \frac{2 \times 3}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} <=> l = 3\sqrt{2}cm.$

Por fim, veja que a região colorida corresponde à região delimitada pelo círculo menos a região delimitada pelo quadrado menor. Logo podemos calcular sua área da seguinte maneira:

$Área\ colorida = Área\ círculo - Área\ quadrado = (\pi \times 3^2) - \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 9\pi - 18 =$

$9(\pi - 2)cm^2.$

5. Quantos números inteiros positivos n apresentam a seguinte propriedade: dentre os divisores positivos de n, diferentes de 1 e do próprio número, o maior é 15 vezes o menor?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 13

Resolução – Alternativa C.

Fatos que ajudam: observe que se o maior divisor do número diferente do próprio número é igual a 15 vezes o menor divisor diferente de 1, então um número que atende a essas condições é, com certeza, um múltiplo de 15 e, consequentemente, múltiplo de 3 e de 5.

Além disso como o maior divisor desse número é igual a 15 vezes o menor divisor distinto de 1, então esse menor divisor deve aparecer ao menos duas vezes na decomposição, em fatores primos, do número em questão. Por fim, vamos representar por α o menor divisor do número distinto de 1. Através das informações destacadas verificamos que um número que atende as condições desejadas é da forma α×(3×5×α).

Veja que o maior valor possível para α é 3. Ao contrário, esse número não seria o menor divisor distinto de 1 do número em questão.

Logo os números que atendem a essas condições são:

$2 \times 3 \times 5 \times 2 = 60; \quad 3 \times 3 \times 5 \times 3 = 135.$

Nível J

1. Qual dos números a seguir é um número par, qualquer que seja o valor inteiro de n?

A) $2020+(n+1)$ B) $2020+n^2$ C) $n^3+2020n$ D) n^5+2021 E) $2n^2+2020$

Resolução – Alternativa E.

Fatos que ajudam: a adição de dois números pares resulta num número par, assim como a adição de dois números ímpares resulta num número par. A adição de um número par e um número ímpar resulta num número ímpar. Por fim, um número par é sempre um múltiplo de 2. Dessa maneira, vamos analisar cada uma das alternativas a seguir.

Em A) veja que se n for um número par, então n+1 será um número ímpar e, portanto, ao adicionarmos a 2020, teremos um número ímpar como resultado.
Em B) basta notar que nem todo quadrado é par. Por exemplo, $1^2=1$, que é ímpar. Logo, ao adicionarmos a 2020, teremos um número ímpar como resultado.
Em C) veja que basta tomar n=1 para verificar que o resultado será um número ímpar.
Em D basta notar que basta tomar um número que, quando elevado a quinta, resulte num número par, como o 2, para verificar que o resultado será um número ímpar.
Em E) veja que, independentemente do valor escolhido para n que será elevado ao quadrado, quando multiplicarmos por 2, teremos um valor par que, quando adicionado a 2020, que também é par, resultará num número par.

2. A é o número 11111...1111 formado por exatamente 2020 algarismos iguais a 1. Qual é a soma dos algarismos do número igual ao produto de A por 2020?

A) 8000 B) 8072 C) 8076 D) 8080 E) 2020

Resolução – Alternativa D.

Fatos que ajudam: observe que o número 2020 atinge a quantidade de casas decimais da terceira potência do 10. Dessa forma, quando multiplicamos 2020 pelo número formado por 2020 algarismos iguais a 1, obtemos um número com 2023 casas decimais.

Vamos, inicialmente, decompor a multiplicação mencionada em etapas e realizar algumas delas, para que seja possível visualizar possíveis regularidades entre os números a serem obtidos:
$2020\times 1=2020;$ $2020\times 10=20200;$ $2020\times 100=202000;$
$2020\times 1000=2020000.$

Podemos notar, através dessas multiplicações, que a primeira casa decimal do resultado será igual a 0. Além disso, a segunda e a terceira casas decimais estarão acompanhadas do 2. Enquanto isso, a partir da quarta casa decimal, encontraremos o 4.

Por outro lado, observe a seguir que os cálculos realizados anteriormente descrevem a multiplicação 2020×1111 através da decomposição:

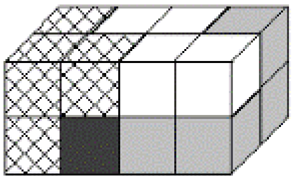
$2020 \times 1111 = 2020 \times (1 + 10 + 100 + 1000) = 2244220.$

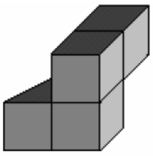
Perceba que se realizarmos cálculos sucessivos, podemos verificar, através da regularidade apresentada que a primeira casa decimal do número final estará acompanhada do 0, a segunda, a terceira e as duas últimas casas decimais estarão acompanhadas do 2 e as 2018 casas decimais restantes estarão acompanhadas do 4.

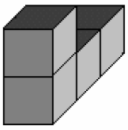
Portanto a soma dos algarismos desse produto pode ser obtida através do seguinte cálculo:

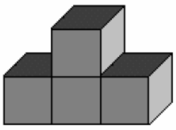
$Total = (2018 \times 4) + (4 \times 2) + (1 \times 0) = 8080.$

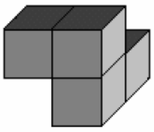
3. Usando 4 peças formadas por 4 cubinhos cada uma, Lucas construiu o bloco retangular da figura ao lado. Três dessas peças podem ser vistas completamente na figura e a peça cinza escura pode ser vista parcialmente. Qual das peças abaixo é a peça cinza escura usada por Lucas?

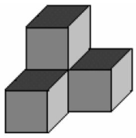


A) 

B) 

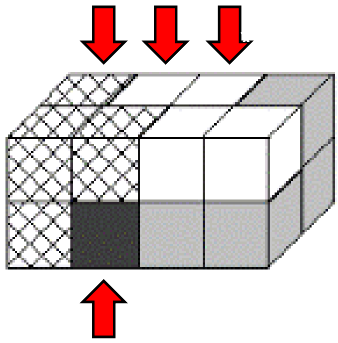
C) 

D) 

E) 

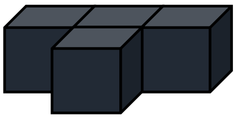
Resolução – Alternativa C.

Fatos que ajudam: sabemos que o bloco construído por Lucas é um paralelepípedo retangular por isso não podem existir espaços vazios em sua construção. Note que na camada superior de cubos do paralelepípedo podem ser vistos 8 cubos. Logo também existem 8 cubos na camada inferior e, dessa maneira, a peça que procuramos completa perfeitamente o paralelepípedo, pois existem 4 peças formadas por 4 cubos cada.



As flechas vermelhas indicam os locais, na camada inferior de cubos, em que se encontram os cubos da peça que completa perfeitamente o paralelepípedo.

Portanto a terceira peça apresenta o seguinte formato:



4. Qual é o valor da expressão $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)$?

A) 1010 B) 1011 C) 2019 D) 2020 E) 2021

Resolução – Alternativa B.

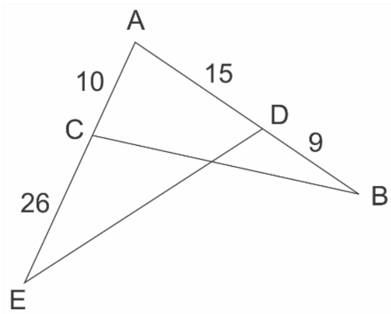
Observe que, se realizarmos a adição das parcelas presentes em cada parêntese da expressão, iremos obter uma regularidade na multiplicação de todos os valores obtidos:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2021}{2020}\cdot\frac{2022}{2021}$$

Note que, da esquerda para a direita, o numerador de cada fração é igual ao denominador da fração seguinte. Dessa forma, ao realizarmos os cancelamentos, restam o denominador da primeira fração e o numerador da última fração. Portanto:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2021}\right)=\frac{2022}{2}=1011.$$

5. Considere os triângulos *ABC* e *ADE* e as medidas de alguns de seus lados, na figura ao lado. Quanto vale a razão $\frac{Área\ (ADE)}{Área\ (ABC)}$?



A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{7}{3}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{15}{10}$ E) $\frac{26}{9}$

Resolução – Alternativa A.

Fatos que ajudam: triângulos semelhantes possuem ângulos internos correspondentes com mesma medida e lados correspondentes com medidas proporcionais. Além disso, a razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado do valor da razão de seus lados correspondentes.

Observe os seguintes fatos em relação aos triângulos ADE e ABC.

$$\frac{EA}{BA}=\frac{36}{24}=\frac{3}{2};\qquad \frac{AD}{AC}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2}.$$

Além disso, os dois triângulos partilham do ângulo formado em $\widehat{A}$.
Assim os triângulos EAD e BAC são semelhantes pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado: dois pares de lados correspondentes têm medidas com a mesma proporção e o ângulo entre esses lados tem mesma medida nos dois triângulos.
Portanto podemos utilizar a relação descrita para calcular a razão entre suas áreas:

$$\frac{Área\ (ADE)}{Área\ (BAC)}=\left(\frac{AD}{AC}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}.$$

Nível S

1. Se $A = 3^3$ e $B = 3^{3^3}$, qual é a relação entre A e B?

A) $A = 3B$ B) $A = B^3$ C) $A^3 = B$ D) $\sqrt[3]{A} = B$ E) $\sqrt[A]{B} = 3$

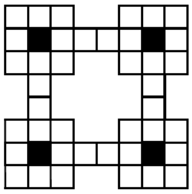
Resolução – Alternativa E.

Fatos que ajudam: Sejam X, Y e Z números reais com $X > 0$ e $Z > 0$. Vale a seguinte igualdade: $\sqrt[Z]{X^Y} = (X)^{\frac{Y}{Z}}$. Por fim, lembre-se de que as expressões $(X^Y)^Z = X^{Y \times Z}$ e $(X)^{Y^Z}$ são diferentes.

Por isso, veja que $A = 27$ e $B = 3^{27}$. Dessa forma, podemos utilizar a propriedade das potências descrita da seguinte maneira:

$$\sqrt[27]{3^{27}} = 3^{\frac{27}{27}} = 3^1 = 3.$$

2. De quantas maneiras podemos cobrir completamente os quadrados unitários vazios do diagrama ao lado com peças iguais formadas por dois quadrados unitários iguais a esta: ?

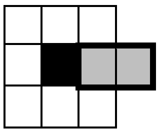


A) 8 B) 16 C) 32 D) 64 E) 100

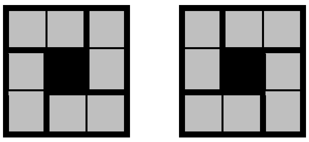
Resolução – Alternativa B.

Fatos que ajudam: para calcular de quantas maneiras diferentes eventos podem acontecer simultaneamente, podemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem. Assim, para descobrir de quantas maneiras todo o diagrama pode ser preenchido com as peças indicadas, basta multiplicar os números de possibilidades de preencher cada região do diagrama com essas peças.

Observe, inicialmente, que não é possível posicionar uma peça da maneira como mostra a figura ao lado: nesse caso, sobraria um quadrado unitário em cada extremidade do diagrama, enquanto temos cada peça sendo formada por dois quadrados unitários.



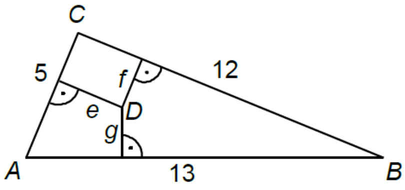
Além disso note que existem duas possibilidades de preencher cada extremidade do diagrama com as peças indicadas. Veja, ao lado, quais são essas possibilidades.



Portanto, através do princípio fundamental da contagem, podemos calcular a quantidade total de possibilidades diferentes de preencher o diagrama com as peças indicadas:

$Total = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16.$

3. O triângulo *ABC* da figura ao lado tem área 30 e *D* é um ponto do seu interior. Se *e*, *f* e *g* são as distâncias do ponto *D* aos lados do triângulo, qual é o valor da expressão 5*e* + 12*f* + 13*g*?

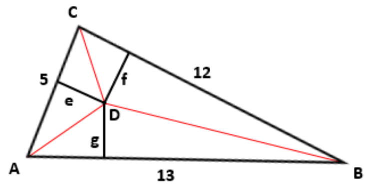


A) 30 B) 60 C) 90 D) 120
E) indeterminada

Resolução – Alternativa B.

Fatos que ajudam: a área de um triângulo qualquer é igual à metade do produto da medida da base e da medida da altura correspondente a essa base.

Vamos, inicialmente, unir os pontos A e D, B e D, C e D através dos segmentos $\overline{AD}, \overline{BD}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Dessa maneira, serão formados três triângulos: ADB, BDC e CDA. Observe que, no triângulo ADB, g é a medida da altura correspondente ao lado $\overline{AB}$, que no triângulo BDC, f é a medida da altura correspondente ao lado $\overline{BC}$ e que, no triângulo CDA, e é a medida da altura correspondente ao lado $\overline{CA}$.

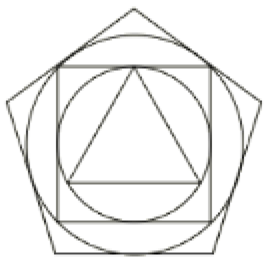


Note, também, que as áreas das regiões delimitadas por esses três triângulos juntas equivalem à área do triângulo ABC.
Portanto, podemos montar a seguinte equação:

$$\frac{CA \times e}{2} + \frac{BC \times f}{2} + \frac{AB \times g}{2} = 30 <=>$$

$$\frac{5e + 12f + 13g}{2} = 30 <=> 5e + 12f + 13g = 60.$$

4. Desenhamos, primeiramente, um triângulo equilátero. Em seguida, a circunferência circunscrita a ele. Depois, um quadrado circunscrito a essa circunferência, a seguir a circunferência circunscrita ao quadrado, depois um pentágono regular circunscrito a essa circunferência, e assim por diante, isto é, continuamos a desenhar novas circunferências e novos polígonos regulares, de modo que o número de lados desses polígonos cresça de um em um, até chegarmos a um polígono regular de 16 lados. Em quantas partes fica dividido o último polígono desenhado?



A) 232 B) 240 C) 248 D) 264 E) 272

Resolução – Alternativa C.

Fatos que ajudam: no desenho, os únicos polígonos que não têm uma circunferência e uma circunferência circunscrita a si mesmo são o triângulo e o polígono regular de 16 lados: o triângulo possui uma circunferência circunscrita somente e o polígono regular de 16 lados possui uma circunferência inscrita somente.

Observe que os demais polígonos apresentam uma regularidade: eles dividem a circunferência que os circunscreve numa quantidade de partes igual a sua quantidade de lados e são divididos pela circunferência inscrita a si mesmo numa quantidade de partes também igual a sua quantidade de lados.

Por fim, podemos notar que a região delimitada pelo triângulo também é uma das regiões em que o último polígono desenhado foi dividido.

Portanto podemos calcular a quantidade de partes em que o último polígono desenhado fica dividido da seguinte maneira:

$$Total = (1 \times 16) + (2 \times 15) + \cdots + (2 \times 4) + (1 \times 3) + (1 \times 1) =$$

$$16 + 2 \times (15 + 14 + 13 + \cdots + 6 + 5 + 4) + 3 + 1 = 20 + (2 \times 114) = 248.$$

5. Uma sequência $a_{0,} a_{1,} a_{2,} \ldots, a_{n,} a_{n+1,}$ é definida da seguinte maneira:

$$a_0 = 4$$
$$a_1 = 6$$
$$\vdots$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, n \geq 1$$

Qual é o valor do termo a_{2020}?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 4

Resolução – Alternativa A.

Fatos que ajudam: podemos calcular alguns dos primeiros elementos dessa sequência, para verificarmos se existe alguma regularidade entre eles.

$$a_0 = 4;\ a_1 = 6;\ a_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2};\ a_3 = \frac{\frac{3}{2}}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};\ a_4 = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6};\ a_5 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$a_7 = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{12}{3} = 4;\ a_8 = \frac{4}{\frac{2}{3}} = \frac{12}{2} = 6.$$

Dessa maneira podemos verificar que os elementos da sequência irão se repetir a cada grupo de 6 elementos.

Observe, também, que a sequência começa a partir do elemento a_0. Logo o elemento a_{2020} será o 2021º elemento da sequência.

Como o resto da divisão de 2021 por 6 é igual a 5, pois 2021 = (336 x 6) +5, concluímos que $a_{2020} = a_5 = \frac{1}{6}$.