UMA INTRODUÇÃO DIDÁTICA AOS LOGARITMOS DE NAPIER A PARTIR DE SUA ORIGEM HISTÓRICA

Rogerio Luiz Quintino de Oliveira Junior
Doutor em Ciências.
Professor do Departamento de Análise – IME/UERJ
roger.quintino@hotmail.com

RESUMO:

Este trabalho aborda a concepção dos logaritmos por John Napier a partir de suas ideias e circunstâncias originais, além de apresentar um exemplo motivador na aplicação das tábuas de logaritmos de Napier, publicadas no início do século XVII, para calcular a distância entre duas cidades. Desta forma, pretende-se revelar, de uma forma prática, a contribuição que a invenção dos logaritmos trouxe para os cálculos necessários à Astronomia e, consequentemente, à Trigonometria Esférica, numa época onde eles eram feitos manualmente. A forma de abordagem interdisciplinar do exemplo mencionada acima tenciona realçar, para o leitor, a importância dos cálculos de multiplicações, divisões, potências e raízes inerente aos logaritmos e dar uma maior significação deles, fugindo, assim, da sua definição padrão adotada pelos livros didáticos nos dias de hoje e servir como um elemento motivador no ensino-aprendizado desses objetos.

Palavras-chave: Ensino; História da Matemática; Logaritmos; Astronomia.

A TEACHING INTRODUCTION TO NAPIER'S LOGARITHMS FROM THEIR HISTORICAL ORIGIN

ABSTRACT:

This work addresses the design of logarithms by John Napier from his original ideas and circumstances, in addition to presenting a motivating example in the application of Napier's logarithm tables, published in the early 17th century, to calculate the distance between two cities. In this way, it is intended to reveal, in a practical way, the contribution that the invention of logarithms brought to the calculations necessary to Astronomy and, consequently, to Spherical Trigonometry, at a time when they were made manually. The form of interdisciplinary approach in the example mentioned above intends to highlight, for the reader, the importance of calculations of multiplications, divisions, powers and roots inherent to logarithms and to give them a greater significance, thus escaping from its standard definition adopted by textbooks nowadays and serve as a motivating element in the teaching-learning of these objects.

Keywords: Teaching; History of Mathematics; Logarithms; Astronomy.

INTRODUÇÃO

No ensino de logaritmos, quer seja no Ensino Médio ou até mesmo em cursos de Pré-Cálculo, por exemplo, é notória a dificuldade que os alunos possuem em assimilar o conteúdo e utilizá-lo na resolução de exercícios e situações-problema. Tal fato se torna um maior agravante para os indivíduos que ingressam em algum curso superior que exija esses conteúdos matemáticos como pré-requisitos de alguma de suas matérias, como aqueles que possuem a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no seu currículo.

Pensando no uso prático dos logaritmos, é bastante curioso ver se um aluno sabe para que e onde eles são utilizados. Por outro lado, a maioria dos professores de Ensino Médio tratam os logaritmos apenas da forma apresentada pelos livros didáticos que as escolas onde trabalham adotaram, a fim de cumprirem o currículo escolar. Assim, em geral, os logaritmos acabam sendo introduzidos aos alunos de uma forma abstrata, por uma definição baseada na função exponencial, e isto acarreta uma série de dificuldades de aprendizado. Uma delas é observada por Lima (1996):

> [...] ela requer que se estudem preliminarmente as propriedades da função exponencial, em particular que se saiba o significado de a^y quando y é irracional, e que se provem regras como $a^y \cdot a^z = a^{y+z}$ para $y,\ z \in \mathbb{R}^+$ quaisquer. Tais preliminares envolvem dificuldades técnicas que conduzem ao seguinte dilema: ou passar por cima dessas dificuldades, fazendo de conta que elas não existem – o que deixa a desejar do ponto de vista da honestidade científica – ou esgotar a paciência do aluno (ou leitor) com longos detalhes rebarbativos. (LIMA, 1996, p. 2, Introdução)

No final, os alunos acabam decorando uma série de regras operacionais envolvendo logaritmos para resolverem os vários exercícios e problemas a que são expostos pelos professores, mas sem conseguirem desenvolver um significado sobre o que são os logaritmos e onde eles podem ser úteis. Assim, os estudantes acabam não observando as diversas áreas de aplicabilidade desses objetos e ficam muito restritos somente aos cálculos envolvendo suas propriedades.

Ter a iniciativa de flexibilizar o ensino da matemática como, por exemplo, permitindo o uso da História da Matemática e das ideias por trás da origem de assuntos que os estudantes sentem, em geral, dificuldades em assimilar, pode ser um meio facilitador no ensino-aprendizagem, como observa Miguel (1993):

> Uma primeira forma diz respeito às possibilidades de se recorrer à história como um recurso pedagógico adicional, isto é, como meio auxiliar, potencialmente rico, para se promover e repensar o ensino-aprendizagem de matemática. (MIGUEL, 1993, p. 12)

Por outro lado, segundo a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), uma das atuações de seus currículos é

> [..] decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem. (BRASIL, 2017, p. 16)

Desta forma, o presente trabalho tem por objetivo resgatar a origem histórica dos logaritmos a fim de motivar o leitor a refletir sobre seu significado original, que era de simplificar as várias operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação que apareciam nos cálculos astronômicos necessários na época de sua descoberta pelo escocês John Napier, no início do século XVII. Vale observar que o nome Napier foi traduzido em diversas formas, como Neper, por exemplo (HOBSON, 1914).

> O progresso da astronomia passou a depender da capacidade de realizar manualmente um grande número de cálculos para a determinação das posições dos astros, que envolviam multiplicações de divisões dos valores das funções trigonométricas, muito mais morosas e susceptíveis a erros que as adições e subtracções. (LEMOS, 2012, p. 67)

Antes de apresentar a definição de logaritmo da maneira usual no Ensino Médio e ensinar várias propriedades para resolução de exercícios que, na maioria das vezes, não trarão valor significativo ao que foi aprendido pelos estudantes, mostrar a origem desses seres e as ideias por trás de sua criação pode ser um meio facilitador no ensino-aprendizagem, como constata Lemos (2012):

> Nos nossos dias, o ensino da matemática tende frequentemente para a aplicação “mecanicista” de técnicas apoiada numa notação eficiente, orientada para a resolução de exemplos e problemas, sem estimular uma compreensão suficientemente profunda das ideias e dos conceitos. O estudo da história da matemática é uma excelente forma de mitigar esta deficiência. Permite-nos compreender a génese e o desenvolvimento das grandes ideias, tal como surgiram e tomaram forma na mente dos grandes matemáticos. (LEMOS, 2012, p. 66)

Além de incluir um resumo histórico das ideias e circunstâncias que culminaram na criação dos logaritmos por Napier, este artigo também propõe um exemplo prático e interdisciplinar de aplicação desses objetos no cálculo da distância entre as cidades do Rio de Janeiro e Istambul sem o uso de uma calculadora científica ou um computador, o que seria indispensável nos dias de hoje, mas apenas usando as tábuas de logaritmos criadas por Napier e alguns conceitos de Astronomia. Com este exemplo, pretendemos indicar como os logaritmos, de fato, ajudaram os cálculos na época de sua concepção, onde não existiam calculadoras ou computadores, e dar mais sentido à importância desses elementos tão presentes na matemática e em outras ciências.

Para medir a distância entre as cidades mencionadas, como vimos, também serão apresentados alguns conceitos básicos de Trigonometria Esférica, indispensáveis aos estudos astronômicos e que serão necessários para sua determinação. Observando a fórmula envolvendo funções trigonométricas que teremos que usar, o leitor poderá perceber o porquê das tábuas criadas por Napier serem de logaritmos de senos de ângulos, e não de logaritmos sobre números quaisquer.

UM BREVE RELATO HISTÓRICO DA DESCOBERTA DOS LOGARITMOS POR NAPIER

O século XVI, precedente ao da descoberta dos logaritmos, foi um período de intensa revolução em diferentes campos científicos. Dentre eles, se destacavam a astronomia e a ciência geodésica. Observamos que geodésica é a ciência que estuda as dimensões e a forma terrestres e seu campo gravitacional. Um de seus objetivos é fazer um mapeamento da Terra e calcular a distância entre pontos distintos sobre o globo terrestre (MONICO, 2018). Esses dois campos foram muito importantes, por exemplo, para as Grandes Navegações que ocorreram nos séculos XV e XVI, pois exigiam dos exploradores que se aventurassem por um mar inexplorado: o Oceano Atlântico. Para tal feito, eles precisavam, de alguma forma, se localizar neste mar, e observar a posição dos astros no céu era a única maneira para isso. Desta forma, era necessário conhecer, com a maior precisão possível, as medidas da Terra e a distância entre pontos situados em posições diferentes do globo terrestre.

Observações astronômicas eram realizadas pela humanidade há milênios antes das Grandes Navegações que citamos, mas foi na Grécia antiga, no período entre, aproximadamente, 600 a.C. a 400 d.C., que esta ciência atingiu seu apogeu na antiguidade com astrônomos como Eratóstenes e Ptolomeu (OLIVEIRA & SARAIVA, 2016).

Com a evolução da astronomia pela observação do cosmos, os gregos antigos chegaram à conclusão de que a Terra deveria ter um formato esférico. Além disso, eles imaginavam que as estrelas estavam muito distantes de nós e cobriam todo o céu, e que este também deveria ter um formato de uma esfera com a Terra em seu centro. Este conceito do cosmos é chamado de *Esfera Celeste* e uma descrição dele pode ser visto na obra *República*, de Platão (~427 a 347 a.C.) (DREYER, 1953, p. 56).

Como tanto a Terra quanto o céu deveriam ter formatos esféricos, calcular a (menor) distância entre pontos diferentes sobre o globo terrestre ou situados no céu exigiu o desenvolvimento de novos conceitos matemáticos: a *Trigonometria Esférica* e o que hoje chamamos de *Geometria Esférica*, um tipo de geometria não-euclidiana formalizada somente no século XIX (MONTEIRO, 2018/2019; CARMO, 1987).

Figura 1: A Esfera Celeste

Fonte: Retirado de <https://docplayer.com.br/72490531-Mini-curso-de-astronomia-do-museu-do-eclipse.html>. Acesso em 10 mai. 2020.

Na próxima seção deste trabalho, veremos mais detalhes sobre alguns conceitos de Geometria Esférica e de triângulos esféricos, necessários na resolução do problema prático proposto no início deste artigo. Por hora, basta saber que a fórmula que será usada, conhecida como a *lei dos cossenos na Trigonometria Esférica*, envolve produtos entre senos e/ou cossenos de certos ângulos. E é este tipo de cálculo que induziu a descoberta dos logaritmos por John Napier no início do século XVII.

Cálculos como os descritos na lei acima são morosos de serem feitos, além da chance de se obter resultados errôneos ser grande. Por isso, os matemáticos da época de Napier estavam bastante engajados em criar métodos de cálculo que, ao mesmo tempo que pudessem acelerar as contas a serem feitas, também minimizassem os erros cometidos. E foi pensando em um método desses que Napier criou seus logaritmos.

É importante destacar que, antes da criação dos logaritmos, existia há muito tempo um método baseado em relações trigonométricas para aproximar produtos e divisões, a *prostaférese*. Mas esse método, apesar de facilitar os cálculos, ainda era demorado e necessitava de tabelas trigonométricas muito precisas para aproximar bem o resultado desses cálculos (LEMOS, 2012, p. 67-68).

No entanto, a ideia por trás deste método, era bastante interessante: ele transformava produtos e divisões em somas e subtrações, respectivamente. Por outro lado, era sabido deste a antiguidade por Archimedes a relação entre potências (de uma mesma base) e seus expoentes, que é uma relação entre progressões geométricas e aritméticas Por exemplo, se tomarmos um número positivo a maior do que 1 e dois números naturais n e m, e considerarmos que os números a^n e a^m ocupam as posições n e m na sequência dos números naturais, veremos que o número a^{n+m} ocupa, nesta mesma sequência, a posição de ordem $n + m$. Este é o princípio básico dos logaritmos (NAUX, 1966, p. 14).

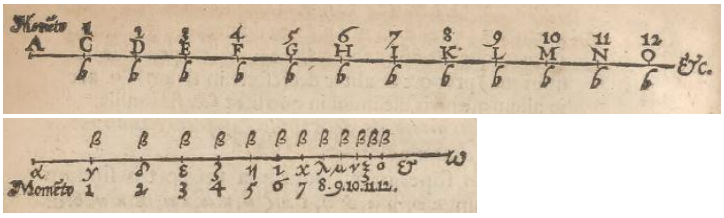
Outros matemáticos precursores de Napier, como N. Chuquet, na França, e M. Stifel, na Alemanha, também observaram a relação entre as duas progressões vista acima, mas não conseguiram chegar muito além disso, apesar de Stifel conseguir chegar à conclusão que a mesma relação podia ser estendida para valores negativos na progressão aritmética dos expoentes (NAUX, 1966). Napier, por sua vez, conseguiu entender a sutileza da natureza entre estas duas progressões e inventar um método de calcular que transformaria o mundo: o cálculo dos logaritmos. Uma vez que ele estava interessado em reduzir o tempo gasto nos cálculos astronômicos, seus logaritmos foram feitos sobre valores de senos de ângulos que variavam no intervalo de zero grau até 90 graus, com intervalos de um minuto.

Em 1614, foi publicado o livro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (ou, simplesmente, “Descriptio”) de Napier, um trabalho onde o ele apresentava, nas 57 primeiras páginas de texto, a construção de seus logaritmos e seu uso nas trigonometrias plana e esférica, além de 90 páginas de tábuas de logaritmos calculados sobre valores de senos de ângulos como descritos acima (NAPIER, 1614).

A ideia de Napier para a construção dos seus logaritmos foi a seguinte: ele imaginou dois objetos P e Q movendo-se, ao mesmo tempo, em linha reta e partindo do mesmo instante. Enquanto P percorria intervalos iguais em intervalos de tempo iguais sobre uma reta infinita, Q percorria um segmento de reta αω de tamanho igual a 10^7 unidades, que correspondia ao raio do círculo para o qual os senos eram medidos. Com este raio, temos que o seno de 90º, chamado de seno total, é 10^7. É importante observar que, nesta época, o seno de um ângulo não era definido como nos dias atuais, isto é, por uma razão, mas como o tamanho da metade de uma corda de um círculo de raio dado que subentende o ângulo no seu centro (HOBSON, 1914, p. 19). Observe a figura 4 abaixo como exemplo.

Desta forma, Napier supôs que o objeto P executava um movimento uniforme sobre a reta e que Q percorria o segmento de reta αω por distâncias cada vez menores em intervalos iguais de tempo. O objeto Q, de acordo com Napier, se movia sobre o segmento αω da esquerda para a direita de tal forma que sua velocidade devia ser, em cada ponto do segmento, proporcional à distância dele até o final do segmento.

Figura 2: Movimentos dos dois objetos P e Q pensados por Napier.



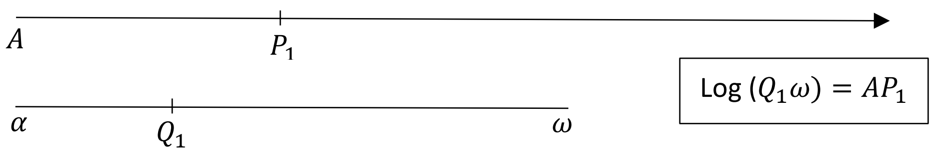
Fonte: NAPIER, 1614, p. 4.

Considerando as hipóteses acima, Napier chegou à conclusão que (HOBSON, 1914, p. 23-26):

$$\frac{\alpha\omega}{\gamma\omega} = \frac{\gamma\omega}{\delta\omega} = \frac{\delta\omega}{\epsilon\omega} = \cdots \qquad (1)$$

Observe que, se fizermos $\frac{\alpha\omega}{\gamma\omega} = \frac{1}{k}$ e $\alpha\omega = 1$, então teremos $\gamma\omega = \mathrm{k}$, $\delta\omega = k^2$, $\epsilon\omega = k^3$ etc., isto é, estes intervalos percorridos por Q formam uma progressão geométrica com razão $0 < k < 1$. Claramente, os intervalos AC, CD, DE etc. percorridos por P formam uma progressão aritmética de razão 1. Assim, considerando que os valores de seno dos ângulos eram representados sobre o segmento $\alpha\omega$, quando Q estivesse numa determinada posição Q_1 sobre o segmento $\alpha\omega$, enquanto executava seu movimento da esquerda para a direita, e o objeto P estaria numa posição P_1 sobre a reta no mesmo instante, Napier definiu o logaritmo do seno ou do tamanho $Q_1\omega$ como sendo a distância AP_1 sobre a reta infinita. Desta forma, o logaritmo do seno total $\alpha\omega$ (igual à 10^7) é igual a zero e, à medida que os valores dos senos decrescem a zero, seus logaritmos são sempre positivos e vão aumentando indefinidamente (HOBSON, 1914, p. 24).

Figura 3: Definição do logaritmo de Napier



Fonte: O autor, 2020.

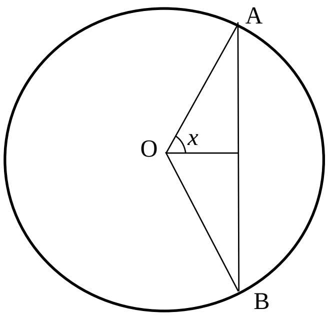
A palavra logaritmo, criada por Napier, também é chamada por ele de “número artificial” em sua obra “Descriptio”. (HOBSON, 1914, p. 15).

Da relação (1) e da definição de logaritmo acima, Napier expressou a relação fundamental de seus logaritmos: se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então (NAUX, p. 47):

$$\log(a) - \log(b) = \log(c) - \log(d).$$

A partir dela, ele demostra outras propriedades como, se $b = c$, então $2\log(b) = \log(a) + \log(d)$. Nota-se, portanto, que as fórmulas obtidas por Napier são bem diferentes das que são vistas no Ensino Médio. Isto se deve ao fato de Napier tentar obter fórmulas que se adaptassem à estrutura das regras dadas às proposições de Trigonometria, que eram expressas em proporções do V livro de Euclides (NAUX, 1966, p. 47).

Figura 4: Definição do seno através de cordas



$$\boxed{\operatorname{sen}(x) = \frac{AB}{2}}$$

Fonte: O autor, 2020.

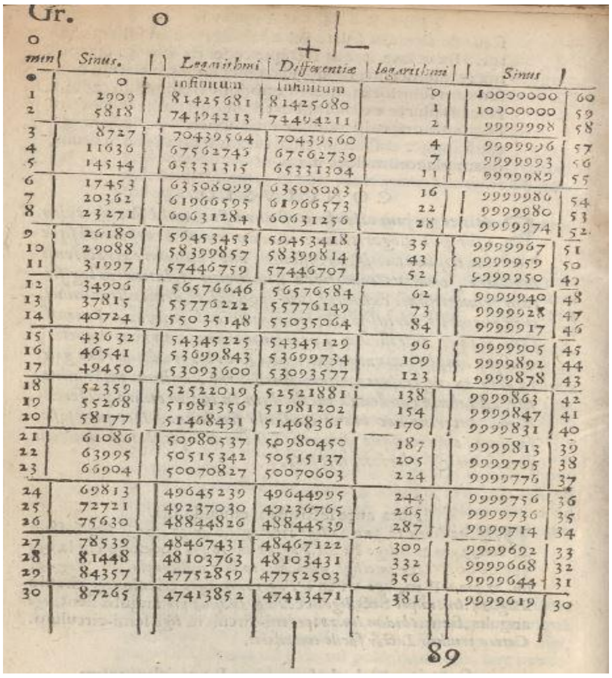
Outra observação é que os logaritmos construídos por Napier não são aqueles que alguns chamam de “logaritmos neperianos”, ou que possuem base e. Na realidade, seus logaritmos estão mais relacionados àqueles cuja base é ${}^{1}/_{e}$ (HOBSON, 1914, p. 20). Além de Napier não ter construído seus logaritmos através de uma base, o número e só seria definido para representar a base dos logaritmos naturais muito tempo depois por Euler (LEMOS, 2012, p. 85).

Com a definição de logaritmo e suas propriedades demonstradas, Napier construiu as tábuas de logaritmos dos senos de ângulos variando de zero a noventa graus, minuto a minuto. Assim, essas tábuas não possuem logaritmos de números equidistantes, mas foram construídas para números correspondendo a ângulos equidistantes.

Cada tábua possui os logaritmos do seno, na sua parte esquerda, e do cosseno, na sua parte direita, de um determinado ângulo, ambos aparecendo na mesma linha. Além disso, nesta mesma linha há a diferença entre esses logaritmos, o que dá, portanto, o logaritmo da tangente do referido ângulo. Abaixo, temos como exemplo a primeira tábua de logaritmos de Napier.

Para ler cada tábua, temos que ter em mente o seguinte: Napier calculou os valores de senos e dos seus logaritmos considerando o seno total sendo igual ao raio da circunferência com medida de 10^7 unidades. Levando em conta que, atualmente, os valores de senos são calculados no círculo unitário, ao ler as tábuas de Napier devemos pensar que os números apresentados possuem 7 casas decimais.

Figura 5: primeira tábua de logaritmos de Napier



Gr. 0

min	Sinus.	Logarithmi	Differentiæ (+ | −)	logarithmi	Sinus	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562745	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55
6	17453	63508099	63508083	16	9999986	54
7	20362	61966595	61966573	22	9999980	53
8	23271	60631284	60631256	28	9999974	52
9	26180	59453453	59453418	35	9999967	51
10	29088	58399857	58399814	43	9999959	50
11	31997	57446759	57446707	52	9999950	49
12	34906	56576646	56576584	62	9999940	48
13	37815	55776222	55776149	73	9999928	47
14	40724	55035148	55035064	84	9999917	46
15	43632	54345225	54345129	96	9999905	45
16	46541	53699843	53699734	109	9999892	44
17	49450	53093600	53093577	123	9999878	43
18	52359	52522019	52521881	138	9999863	42
19	55268	51981356	51981202	154	9999847	41
20	58177	51468431	51468361	170	9999831	40
21	61086	50980537	50980450	187	9999813	39
22	63995	50515342	50515137	205	9999795	38
23	66904	50070827	50070603	224	9999776	37
24	69813	49645239	49644995	244	9999756	36
25	72721	49237030	49236765	265	9999736	35
26	75630	48844826	48844539	287	9999714	34
27	78539	48467431	48467122	309	9999692	33
28	81448	48103763	48103431	332	9999668	32
29	84357	47752859	47752503	356	9999644	31
30	87265	47413852	47413471	381	9999619	30

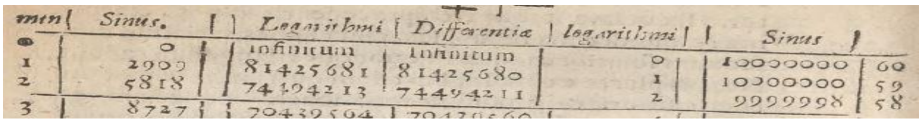
89

Fonte: NAPIER, 1614, p. 74.

Por exemplo, na linha 3 da tábua da figura 5, vemos, ao lado direito da tabela, o valor do seno de $0^0\ 2'$ e o logaritmo dele que são, nesta ordem, $0{,}0005818$ e $7{,}4494213$. Já do lado esquerdo desta mesma linha, a tábua nos informa que o seno de $89^0\ 58'$ e seu logaritmo são, respectivamente, $0{,}9999998$ e $0{,}0000002$. Observe que os ângulos são formados pelo valor do grau na parte de cima e pela coluna dos minutos na parte direita ou pelo valor do grau na parte de baixo e pela coluna dos minutos na parte esquerda. A partir disso, vemos os valores do seno e de seu logaritmo como mostrado abaixo.

Figura 6: Como ler as tábuas de Napier

Para ler informações de $0^0\ 2'$ Para ler informações de $89^0\ 58'$



min	Sinus.	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58

Fonte: NAPIER, 1614, p. 74.

Vale destacar que, também no início do século XVII, os logaritmos foram descobertos, de maneira independente de Napier, pelo suíço J. Bürgi. Em 1620, ele publicou sua obra *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen* onde apresentava uma tabela correspondendo duas progressões, uma aritmética e outra geométrica com razão diferente da de Napier. No entanto, Bürgi não desenvolveu o conceito abstrato de logaritmo e sua obra se concentrou apenas na relação entre as progressões dadas na tabela

(LEMOS, 2012, p. 77-78). Juntando este fato e o propósito deste artigo de usar uma fórmula que envolve funções trigonométricas, não nos estenderemos mais sobre a obra de Bürgi.

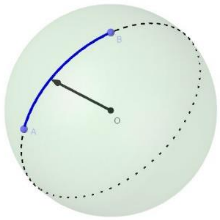
O USO DE LOGARITMOS DE NAPIER NA GEOMETRIA ESFÉRICA – UM EXEMPLO DIDÁTICO

Nesta seção, veremos um problema prático para dar uma ideia do uso das tábuas de logaritmos de Napier publicadas em seu famoso livro *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio* (NAPIER, 1614). O objetivo é mostrar o porquê das tábuas de Napier serem formadas por logaritmos calculados sobre valores de senos e perceber a investida de Napier em facilitar os árduos cálculos executados pelos astrônomos de sua época. Usaremos sempre a notação matemática moderna para facilitar o entendimento, apesar de reforçarmos o fato de que a notação usada na época de Napier era diferente.

O exemplo é o seguinte: **Calcule a distância entre as cidades do Rio de Janeiro e Istambul, na Turquia.**

Antes de resolvermos o exemplo supracitado, devemos explorar alguns conceitos de Astronomia conhecidos desde a antiguidade. Apenas nos preocuparemos com os princípios mais simples do que hoje conhecemos como *Geometria Esférica*. O uso deste tipo de geometria *não euclidiana* se justifica pelo fato de que, para calcularmos a distância entre as cidades mencionadas no exemplo, devemos nos ater ao fato delas estarem sobre o globo terrestre, que tem, aproximadamente, um formato esférico, e não sobre um plano. Assim, a (menor) distância entre dois pontos do globo não pode ser uma linha reta, como acontece num plano qualquer. Na realidade, numa superfície esférica, a menor distância entre dois pontos A e B distintos é o comprimento do arco menor AB contido na circunferência máxima que passa por A e por B, isto é, a circunferência que contém os pontos A e B possuindo o raio igual ao da superfície esférica. A prova deste fato pode ser vista em diversos lugares, pois se trata de um conceito de Geometria Diferencial (ALVES, 2009, p. 39-40).

Figura 6: menor distância entre dois pontos A e B sobre uma esfera



Fonte: O autor, 2020.

Como uma observação, a Geometria Esférica é chamada de não euclidiana pois contraria o V Postulado de Euclides, sobre retas paralelas (CARMO, 1987).

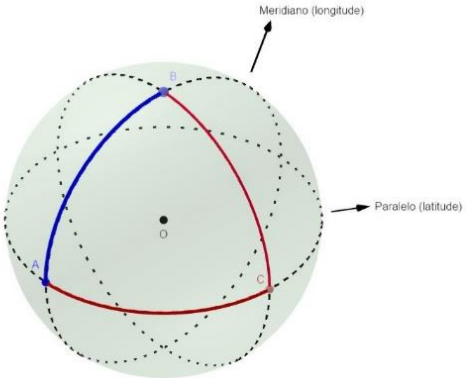
Vale lembrar, como dissemos no início deste artigo, que a Astronomia se utiliza muito dos conceitos da Geometria Esférica desde a antiguidade, pois os antigos astrônomos, para estudar o cosmos, imaginavam que a Terra estava situada no centro de uma grande esfera repleta de estrelas, conhecida como *Esfera Celeste*. Sendo assim, para medir a passagem do tempo ou usar os astros para mapas, eles tinham que saber a distância em graus, na Esfera Celeste, de elementos ali contidos, de forma parecida com a que faremos no exemplo desta seção.

Voltando ao nosso exemplo, sabemos que podemos situar um ponto sobre o globo terrestre a partir da sua *latitude*, que é a distância em graus correspondente ao paralelo terrestre que passa pelo referido ponto em relação à linha do equador, e da sua *longitude*, que corresponde à distância em graus deste ponto em relação ao meridiano de Greenwich (CARVALHO & ARAÚJO, 2008).

Observe a figura 7 abaixo onde traçamos o meridiano que passa pelo ponto B e o paralelo que passa pelo ponto A. O ponto C na figura é uma das interseções destes dois círculos. Obtemos, com isso, o triângulo esférico ABC situado sobre o globo terrestre.

Note que, como o raio da Terra é, aproximadamente, 6.371 km, se soubermos quanto mede, em graus, o arco AB, que está sobre um círculo máximo, poderemos determinar por um cálculo simples a distância AB pedida. Neste ponto é que entra uma fórmula sobre triângulos esféricos conhecida há mais de dois mil anos: a *lei dos cossenos na Trigonometria esférica*.

Figura 7: triângulo esférico contendo o arco AB.



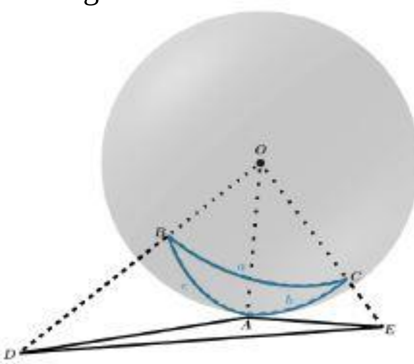
Fonte: O autor, 2020.

Considere um triângulo esférico ABC qualquer com lados a, b e c, que são arcos pertencentes a círculos máximos distintos na esfera onde se situam. O ângulo esférico $\hat{A}$ é definido como sendo o ângulo formado pelas retas tangentes aos planos que contém, respectivamente, os lados (arcos) b e c, que são os lados que formam o ângulo esférico $\hat{A}$ sobre a superfície. A definição é análoga para os ângulos esféricos $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Com isso, temos a *lei dos cossenos aplicada ao ângulo* $\hat{A}$*:*

$$\boxed{cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(c) \cdot cos(\hat{A})}$$

A prova do resultado acima foge do propósito deste artigo, mas ela pode ser encontrada, por exemplo, em Monteiro (2018/2019, p. 29-31) seguindo a figura abaixo. Nela, a, b e c são os lados do triângulo esférico ABC, AD e AE são segmentos tangentes ao plano que contém os lados c e b, respectivamente, e $\hat{A}$ é um ângulo esférico do triângulo ABC pela definição acima. Observe que, no desenho, os triângulos ADE, ADO e AEO são planos e os segmentos OA, OB e OC são raios da circunferência de centro O mostrada.

Figura 8: triângulo esférico ABC de lados a, b e c.



Fonte: MONTEIRO, 2018/2019.

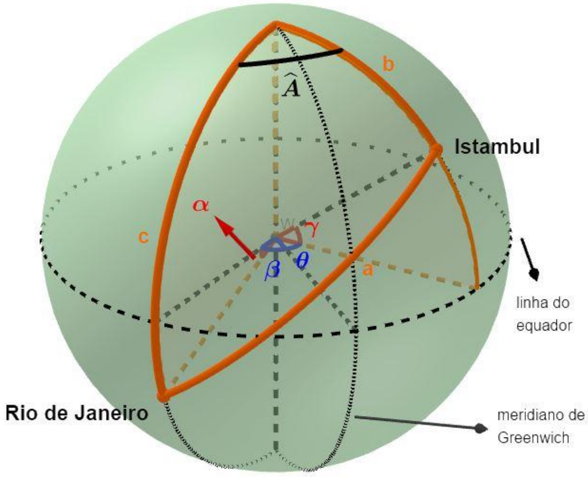
Agora estamos prontos para resolver a questão do exemplo: calcular a distância entre as cidades do Rio de Janeiro e Istambul.

Primeiramente, precisamos das latitudes e a longitudes das duas cidades. Consultando o site <https://codigopostal.ciberforma.pt/ferramentas/coordenadas/>, obtemos as seguintes coordenadas geográficas aproximadas:

- Rio de Janeiro → latitude: S 22º 55' e longitude: W 43º 10';
- Istambul → latitude: N 41º 0' e longitude: E 28º 59'.

Observe que as letras S e W significam, respectivamente, que a cidade do Rio de Janeiro se encontra ao sul da linha do equador e a oeste do meridiano de Greenwich. Da mesma forma, as letras N e E mostram que a cidade de Istambul está ao norte da linha do equador e a leste do meridiano de Greenwich, nessa ordem. Vejamos estas informações na figura abaixo.

Figura 9: Cidades e coordenadas do exemplo



Fonte: O autor, 2020.

Os ângulos α e β na figura acima são, respectivamente, a latitude e a longitude da cidade do Rio de Janeiro, ao passo que os ângulos γ e θ são, nesta ordem, a latitude e a longitude de Istambul. Assim, observando a figura acima podemos ver que:

$$\hat{A} = \beta + \theta = 72º\,9',\ b = 90º - \gamma = 49º \text{ e } c = 90º + \alpha = 112º\,55'.$$

Se tivéssemos usando uma calculadora científica para resolver o problema de encontrar a distância a, poderíamos colocar os ângulos acima apenas em graus aproximados e calcular os valores de senos e cossenos na fórmula da lei dos cossenos na trigonometria esférica que mostramos e efetuar as operações para obter o valor de $\cos(a)$. Com isso, usando a função arco-cosseno nesta mesma calculadora, teríamos a distância a que queremos saber.

No entanto o objetivo deste trabalho é exemplificar como podemos calcular o valor de a sem o uso de calculadoras ou computadores, mas apenas usando as tábuas de logaritmos elaborada por Napier na sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio* (NAPIER, 1614).

Antes de mais nada, como as tábuas são para ângulos que se encontram no intervalo de zero grau a noventa graus, procedemos como segue. Vale observar que as fórmulas de trigonometria usadas abaixo são conhecidas desde a antiguidade, embora não se fizesse o uso dos termos seno e cosseno, que só viriam a aparecer muitos séculos depois de Cristo (HODGKIN, 2005). Além disso, como dissemos no início desta seção, usaremos a notação matemática moderna para todos os cálculos que fizermos.

- $\cos(c) = \cos(112^0\ 55') = -\text{sen}(112^0\ 55' - 90^0) = -\text{sen}(22^0\ 55')$;
- $\cos(b) = \cos(49^0) = \text{sen}(90^0 - 49^0) = \text{sen}(41^o)$;
- $\cos(\hat{A}) = \cos(72^0\ 9') = \text{sen}(90^0 - 72^0\ 9') = \text{sen}(17^0\ 51')$;
- $\text{sen}(c) = \text{sen}(112^0\ 55') = \text{sen}(90^o - 22^o\ 55') = \text{sen}(67^o\ 5')$.

Com isso, a lei dos cossenos, para o nosso caso, fica:

$$\cos(a) = -\text{sen}(41^0)\cdot\text{sen}(22^0\ 55') + \text{sen}(49^0)\cdot\text{sen}(67^0\ 5')\cdot\text{sen}(17^0\ 51'). \quad (2)$$

Observe que

$$x = \text{sen}(A)\cdot\text{sen}(B) \Leftrightarrow x = ln^{-1}\big(ln\big(\text{sen}(A)\big) + ln\big(\text{sen}(B)\big)\big).$$

Com isso, vemos a facilidade que as tábuas de logaritmos de Napier nos trazem para calcular os produtos:

1. Primeiro procuramos os valores dos logaritmos de $\text{sen}(A)$ e de $\text{sen}(B)$ nas tábuas a partir dos ângulos A e B;
2. Depois, somamos os valores desses logaritmos;
3. Por fim, procuramos nas tábuas um valor de um logaritmo aproximado à soma que encontramos no passso 2 e o valor do produto entre $\text{sen}(A)$ e $\text{sen}(B)$ será, aproximadamente, o valor do seno correspondente ao logaritmo aproximado que encontramos.

É facil de ver como o método acima elimina os difíceis cálculos dos produtos que precisamos encontrar.

Vamos obter o valor aproximado para o primeiro produto da equação (2). Observe as figuras abaixo.

Figura 10: informações sobre o ângulo de 41^0.

41 min	Sinus.	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
0	6560590	4215044	1400823	2814221	7547096	60
1	6562785	4211698	1394947	2816751	7545187	59
2	6564979	4208354	1389072	2819282	[illegible]	[illegible]

Fonte: NAPIER, 1614, p. 156.

Figura 11: informações sobre os ângulos de $22^0\ 55'$ e de $67^0\ 5'$.

Gr. 22

22 min	Sinus.	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
54	3891240	9438571	8617632	820939	9211855	6
55	3893919	9431688	8609520	822168	9210723	5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	9209590	4
					67	min Gr. 67

Fonte: NAPIER, 1614, p. 119.

A partir das tábuas acima, obtemos os logaritmos dos senos de 41^0 e de $22^0\ 55'$, cuja soma é $0{,}4215044 + 0{,}9431688 = 1{,}3646732$.

Um valor de logaritmo que mais se aproxima da soma acima é obtido na tábua da página 103, sendo este o logaritmo do seno de $14^0\ 48'$.

Figura 12: informações da tábua da página 103.

Gr. 14

14 min	Sinus.	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
47	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
48	2554158	13647448	13310054	337394	9668233	12
49	2557270	13636445	13298282	338163	9667490	11
50	2560082	13625454	13286521	338933	9666746	10

Fonte: NAPIER, 1614, p. 103.

Portanto, o logaritmo aproximado à soma obtida acima nos dá o valor aproximado do produto que procurávamos: $-\text{sen}(41^0) \cdot \text{sen}(22^0\ 55') \cong -0{,}2554158$.

O segundo produto da equação (2) é calculado da mesma maneira.

Figura 13: informações sobre o ângulo de 49^0.

Gr. 40

40 min	Sinus	logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
59	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
60	6560590	4215044	1400823	2814221	7547096	0
					49	min Gr. 49

Fonte: NAPIER, 1614, p. 155.

Figura 14: informações sobre o ângulo de $17^0\ 51'$.

Gr. 17 + | −

17 min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
30	3007058	12010225	11542341	473884	9537169	30
50	3062492	11833557	11341144	492413	9519514	10
51	3065261	11824520	11331171	493349	9518623	9
52	3068030	11815492	11321206	494286	9517731	8

Fonte: NAPIER, 1614, p. 109.

Observando as tábuas das figura 11, 13 e 14, obtemos a soma dos logaritmos dos senos de 49^0, $67^0\ 5'$ e $17^0\ 51'$:

$$0{,}2814221 + 0{,}0822168 + 1{,}1824520 = 1{,}5460909.$$

Assim, olhando a tábua da página 98 encontramos um logaritmo aproximado à soma acima, o que nos permite concluir que

$$\mathrm{sen}(49^0) \cdot \mathrm{sen}(67^0\ 5') \cdot \mathrm{sen}(17^0\ 51') \cong 0{,}2130304.$$

Figura 15: informações da tábua da página 98.

Gr. 12 + | −

12 min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	logarithmi	Sinus	
17	2127462	15476551	15244966	231585	9771075	43
18	2130304	15463200	15230981	232219	9770456	42
19	2133146	15449868	15217014	232854	9769836	41

Fonte: NAPIER, 1614, p. 98.

Com os valores obtidos desses dois produtos, vemos que

$$\cos(a) \cong -0{,}2554158 + 0{,}2130304 = -0{,}0423854.$$

Vamos usar novamente as tábuas de Napier para calcular a. Primeiramente, sabemos que, como o ângulo a está entre 0^0 e 180^0, pois cada lado de um triângulo esférico está neste intervalo (OLIVEIRA & SARAIVA, 2016) e seu cosseno é um número negativo, segue-se que a deve ser maior que 90^0 e que

$$\mathrm{sen}(a) = \sqrt{1 + (-0{,}0423854)^2}.$$

Na tábua da página 78, vemos que o seno de $2^0\ 29'$ é aproximadamente igual a $0{,}0423854$:

Figura 16: informações da tábua da página 78.

Gr. 2

2 min	Sinus	+ Logarithmi	Differentiæ	− logarithmi	Sinus	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
23	415851	31800141	31791487	8654	9991349	37
24	418757	31730492	31721716	8776	9991228	36
25	421663	31661332	31652434	8898	9991106	35
26	424570	31592644	31583623	9021	9990983	34
27	427476	31524424	31515279	9145	9990859	33
28	430382	31456672	31447402	9270	9990734	32
29	433288	31389371	21379975	9396	9990608	31
30	436194	31322524	31313001	9523	9990482	30

87

Fonte: NAPIER, 1614, p. 78.

Como

$$x = \left(\text{sen}(A)\right)^n \Leftrightarrow x = \ln^{-1}\left(n \cdot \ln\left(\text{sen}(A)\right)\right), \quad \text{para } n \text{ real}, \qquad (3)$$

segue-se que,

$$(0{,}0423854)^2 \cong \ln^{-1}\left(2 \cdot \ln\left(\text{sen}(2^0\ 22')\right)\right) = \ln^{-1}(2 \cdot 3{,}1389371) =$$

$$= \ln^{-1}(6{,}2778742) \cong \text{sen}(0^0\ 6') = 0{,}0017453.$$

Esta última informação sobre o seno de $0^0\ 6'$ foi obtida da tábua da página 74, que está na figura 5. Desta forma, finalmente vemos que

$$\text{sen}(a) \cong \sqrt{1 - 0{,}017453} = \sqrt{0{,}9982547}.$$

Para calcular a raiz quadrada acima, usaremos novamente (3). Temos que, pela tábua da página 80, o valor do seno de $86^0\ 37'$ é aproximadamente igual a $0{,}9982547$.

Figura 17: informações da tábua da página 80.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	17101	9982912	39
22	587256	28348782	28331510	17272	9982742	38
23	590160	28299459	28282015	17444	9982571	37
24	593064	28250377	28232761	17616	9982399	36
25	595967	28201535	28183746	17789	9982226	35
26	598871	28152930	28134967	17963	9982052	34
27	601775	28104561	28086423	18138	9981877	33
28	604678	28056428	28038114	18314	9981701	32
29	607582	28008524	27990033	18491	9981525	31
30	610485	27960848	27942178	18670	9981348	30

86

Fonte: NAPIER, 1614, p. 80.

Assim,

$$(0{,}9982547)^{1/2} \cong \ln^{-1}\left(1/2 \cdot \ln\left(\text{sen}(86^0\ 37')\right)\right) = \ln^{-1}(1/2 \cdot 0{,}0017444) =$$
$$= ln^{-1}(0{,}0008722) \cong \text{sen}(87^0\ 36'),$$

onde esta útima informação foi obtida da tábua da página 78, que se encontra na figura 16 pelo valor de seno mais próximo de 0,0008722.

Lembrando que $90^0 < a \leq 180^0$, segue-se, portanto que

$$a = 180^o - 87^o\ 36' = 92^o\ 24' = 92{,}4^0.$$

Finalmente, considerando que o raio da Terra é, aproximadamente 6.371 km, e $\pi \cong 3{,}14$, por uma regra de três simples contendo o comprimento total da Terra e o arco a calculado acima, obtemos a distância aproximada de Rio de Janeiro a Istambul:

$$d = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6.371 \cdot 92{,}4^0}{360^0} \cong 10.269 \text{ km}.$$

Com o propósito de conferir o resultado acima, podemos recorrer, por exemplo, ao site <http://www.entrecidadesdistancia.com.br/> para verificar a distância entre as cidades. Basta digitarmos “Rio de janeiro, BR” na caixa “Origem” e “Istanbul, TR” na caixa “Destino” e clicar no botão “Calcular Distância”. O resultado que se obtém é 10.283 km. Vemos, portanto, que o cálculo da distância usando as tábuas de logaritmos de Napier nos forneceu um resultado bastante aproximado do real, com um erro de cerca de 14 km, ou, aproximadamente, 0,14 % do valor real.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta de ensino de logaritmos apresentada neste artigo se utilizou da História da Matemática como estímulo inicial para a ressignificação destes objetos, pelo leitor, ao invés de seguir a forma tradicional que os livros didáticos apresentam em defini-los por meio da função exponencial.

Assim, revelar ao aluno de Ensino Médio a origem e qual o propósito que os matemáticos tinham ao criar os logaritmos no início do século XVII tende a ser uma maneira de aguçar a sua curiosidade e facilitar a incorporação, no seu aprendizado, das suas propriedades básicas que, originalmente, visavam mitigar o processo do cálculo de multiplicações, divisões, potências e raízes de números com vários dígitos.

Inverteu-se, portanto, o processo usual de ensino: primeiro, vimos que se pode mostrar as propriedades dos logaritmos, antes de uma definição padrão, para que os estudantes as usem em operações como as referidas acima, com embasamento na sua origem histórica. Além disso, apresentamos um problema prático, o exemplo do cálculo da distância entre duas cidades, numa forma de instigar os alunos na aprendizagem das propriedades dos logaritmos ao fornecer uma situação-problema com uma abordagem interdisciplinar.

Outros temas matemáticos, vistos no Ensino Médio, como progressão aritmética, progressão geométrica e Trigonometria foram tratados dentro da parte histórica do artigo e da resolução do problema de um modo que permite uma nova releitura deles por parte dos estudantes.

As observações acima enfatizam a relevância deste artigo ao apresentar o uso da História da Matemática e da interdisciplinalidade entre as ciências da Matemática e da Astronomia como instrumentos facilitadores de ensino-aprendizagem de logaritmos e de suas propriedades.

Como um último comentário, decidiu-se por usar as tábuas de Napier publicadas em 1614 por dois motivos principais: o primeiro foi o fato da fórmula usada na resolução do exemplo do artigo conter funções trigonométricas, e o segundo foi para enfatizar um erro muito comum cometido tanto por estudantes quanto por professores, o de chamar o logaritmo de base *e* como logaritmo "neperiano".

REFERÊNCIAS

ALVES, S. **A geometria do globo terrestre**. In: Revista de Iniciação Científica OBMEP, Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file>. Acesso em: 22 de mai. de 2020.

CARMO, M. P. do**. Geometrias Não-Euclidianas**. In: Revista Matemática Universitária, n. 6, Rio de Janeiro, 1987.

CARVALHO, E. A. de; ARAÚJO, P. C. de. **Localização**: coordenadas geográficas. Programa Universidade a Distância, UFPB, Natal, 2008. Disponível em <http://www.ead.uepb.edu.br/ava/arquivos/cursos/geografia/leituras_cartograficas/Le_Ca_A08_J_GR_260508.pdf>. Acesso em: 18 mai. 2020.

DREYER, J. L. E**. A History of Astronomy from Thales to Kepler**. Dover Publications, 1953.

HOBSON E. W. **John Napier and the Invention of Logarithms**, 1614, Cambridge University Press, 1914.

HODGKIN, L. **A History of Mathematics**: From Mesopotamia to Modernity. New York: Oxford University Press, 2005.

LEMOS, C. M. **Os Logaritmos e as suas aplicações nas ciências náuticas** – um apontamento histórico. Boletim da SPM 66, maio, Lisboa, 2012, pp. 65-104.

LIMA. E. L. **Logaritmos**. 2ª ed., Rio de Janeiro: SBM, 1996.

MIGUEL, A. **Três estudos sobre história e educação matemática**. 1993. [285]f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253114>. Acesso em: 18 mai. 2020.

MONICO, J. F. G. **Introdução a Geodésica**: perspectiva atual. FCT/UNESP, São Paulo, 2018. Disponível em <http://www2.fct.unesp.br/docentes/carto/galera/FGL/Geod_Definicao.pdf>. Acesso em: 16 mai. 2020.

MONTEIRO, C. A. **Lei dos cossenos na trigonometria esférica e algumas aplicações**. Relatório de estágio de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, 2018/2019. Disponível em <https://sigarra.up.pt/fcup/pt/pub_geral.show_file?pi_doc_id=205728>. Acesso em: 22 mai. 2020.

NAPIER, J. **Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio**, Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, & expeditißimi explicatio. Authore ac Inventore, IOANNE NEPERO, Barone Merchistonii, &c. Scoto. Edinburgh: A. Hart, 1614. Disponível em <https://www.loc.gov/item/04005707/>. Acesso em: 10 mai. 2020.

NAUX, C. **Histoire des logarithmes:** de Neper à Euler. Tome I. Paris: Libraire Scientifique et Technique A. Blanchard, 1966.

OLIVEIRA FILHO, K. de S.; SARAIVA, M. de F. O. **Astronomia e Astrofísica**, 2016. Disponível em <http://astro.if.ufrgs.br/>. Acesso em: 16 mai. 2020.